CENTRALE
MARSEILLE

Introduction à la finance

Dominique HENRIET

Nom de l'enseignement : Finance et Stratégie
Code enseignement : EAO-32-FIST

2ème année
2015-2016

INTRODUCTION A LA FINANCE

(Version 2014)

Dominique HENRIET
Ecole Centrale Marseille

September 24, 2014

INTRODUCTION

La plupart des décisions économiques (dans une entreprise ou même dans la vie privée) sont telles qu'il y a rarement coïncidence temporelle entre dépenses et recettes. Par exemple, un industriel doit d'abord investir dans l'outil de production avant de pouvoir produire, puis vendre, puis encaisser le produit des ventes. Ce décalage est d'autant plus important pour les grands projets nécessitant un ensemble d'activités préalables diverses, de dépenses initiales importantes, de délais de productions longs. De manière générale, ce décalage temporel s'accompagne le plus souvent d'aléa : il peut y avoir incertitude sur les approvisionnements, sur les cours des matières premières, sur l'intensité de la demande ou sur les prix.. Par exemple, un exportateur qui vend un produit à l'étranger est en général payé en dollars deux ou trois mois après la livraison! Sa recette en euro est de ce fait aléatoire et dépendra du cours du dollar à cette date future, alors que sa dépense, elle, est certaine et immédiate. Pour résumer, une décision économique d'investissement s'apparente, toutes proportions gardées, à un pari : la mise est certaine, le gain est aléatoire et plus ou moins différé dans le temps. Il se peut bien sûr que le décalage soit dans l'autre sens : on peut avoir des recettes certaines aujourd'hui, mais des dépenses aléatoires demain. C'est le cas par exemple des salariés qui bénéficient pendant leur vie active de rentrées d'argent "certaines", mais dont l'avenir est incertain (retraite, maladie chômage...).

Pour résumer, l'activité économique est ainsi faite que les recettes et dépenses associées à une activité économique sont tout à la fois décalées dans le temps et incertaines! Les marchés financiers, les institutions financières, les contrats financiers sont des instruments qui permettent de résoudre ce défaut de coïncidence. Pour comprendre le rôle de ces dispositifs, il est éclairant de donner quelques "exemples stylisés" totalement imaginaires mais qui ont l'avantage de faire comprendre les mécanismes élémentaires de la finance.

Intuitions

Comment ne pas tuer les vieux à la naissance?

Sur une planète imaginaire les autochtones ne vivent que deux jours. Le premier ils sont jeunes (et fringants) le second ils sont vieux. A la fin de chaque journée, chaque jeune met au monde un "enfant". Cet effort incomparable le fait alors basculer dans la vieillesse. La population de cette planète est donc constante, constituée pour moitié de jeunes alertes et pour moitié de vieux invalides. Les habitants de cette planète se nourissent de gloouttes (fruits verts très savoureux) qui poussent sur des arbres dont les feuilles sont rouges. Les jeunes sont assez "agiles" pour cueillir des glouttes alors que les vieux n'ont plus la santé pour le faire. Chaque jeune dispose ainsi de q_0 glouttes (qui ne se conservent malheureusement pas plus d'une journée).

L'état initial est donc le suivant : à chaque période le jeune consomme ses glouttes et le vieux ne consomme rien. La période d'après le jeune devient vieux et ne mange plus rien, son "fils" profitant, lui de la vie. A priori, comme les glouttes ne se conservent pas, il est impossible pour un jeune de faire des économies pour sa vieillesse. Pourtant, l'introduction d'instruments financiers permettent d'améliorer la situation.

On peut adopter deux points de vue différents : le point de vue de chaque individu et le point de vue global.

- Pour chaque individu, la situation est claire : il a de quoi vivre à la première période et plus rien à la seconde. Chaque individu a ainsi un excès de ressources à la première période de sa vie et un défaut à la seconde. Tout seul, il est dans l'incapacité de répartir sa richesse sur deux périodes : les glouttes ne se conservent pas!
- Du point de vue global la situation est moins catastrophique : à chaque période vivent deux catégories d'individus : ceux qui ont des ressources excédentaires et qui "aimeraient bien" pouvoir se nourrir quand il seront vieux et ceux qui n'ont aucune ressource (mais qui en ont eu quand ils étaient jeunes). Les jeunes sont prêts à donner une partie de leurs glouttes contre la promesse d'en avoir quand ils seront vieux!

Il est naturel d'introduire un actif financier : cet actif est un "contrat" qui stipule que son détenteur a droit à "une gloutte" en l'échange de ce papier. Les jeunes ont intérêt à acheter ce papier (il leur permettra d'avoir une gloutte plus tard), les vieux ont intérêt à le vendre contre des glouttes!).

Quand le bonheur des uns fait le malheur des autres (et réciproquement)

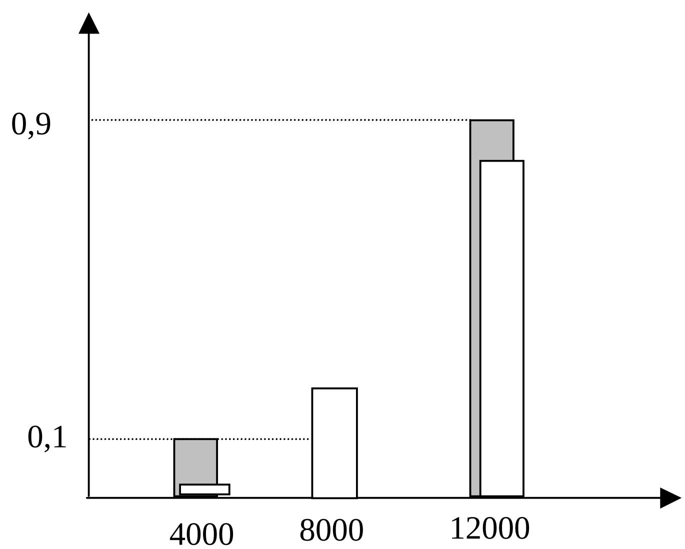
Sur une île exotique, que nous nommerons Féboоupa„ le régime météo est ainsi fait que quand il fait beau sur la côte Est (E) il fait mauvais sur la côte Ouest (W) et vice versa. Evidemment le temps qu'il fera est aléatoire. A chaque saison touristique, soit il fait beau à l'Ouest (et il fait mauvais à l'Est) et les activités touristiques de l'Ouest sont florissantes (à l'Est, au contraire, les affaires sont mauvaises), soit c'est inverse.

Nous sommes ici en présence d'un "pur aléa" : les ressources de chacun des deux côtés de l'île sont aléatoires. Là aussi deux points de vue sont possibles : du point de vue de chaque individu sa ressource est aléatoire et "il n'y a rien à faire". Du point de vue global les choses sont moins risquées : quand l'un a des ressources l'autre n'en a pas et réciproquement.

On voit alors que l'on peut "atténuer" le risque subi par chacun des côtés : la ressource totale (la somme des ressources de l'Est et de l'Ouest) n'est pas aléatoire! L'introduction d'actifs financiers permet d'améliorer la situation . Une compagnie d'assurance peut par exemple proposer un contrat d'assurance qui indemnise en cas de mauvaise météo. Une autre façon de faire consiste à introduire chacune des deux sociétés en bourse : Le côté Ouest prenant alors des participations dans le côté Est et réciproquement (participations croisées).Il est clair qu'un contrat financier entre les deux côtés de l'île permet d'atténuer et même de supprimer complétement l'aléa! Il y a même plusieurs types de contrats qui permettent de le faire : un contrat d'assurance ou un échange d'actions.

Une histoire d'oeufs et de paniers bien connue, sauf qu'il s'agit de bateaux

Bernoulli (Daniel), fameux mahématicien suisse a écrit en 1738 un article (en latin!) "sur une nouvelle théorie de la mesure du risque" (*specimen theoriae novae de mensura sortis*) dans lequel il raconte l'histoire d'un certain Sempronius, sorte de négociant international. Voici ce qu'écrit Bernoulli (traduit en français) : "Sempronius détient chez lui 4000 ducats et, de plus, possède, à l'étranger 8000 ducats de marchandises qui ne peuvent être rapatriées que par bateau. Il se trouve cependant qu'un bateau a une chance sur dix de sombrer pendant le voyage". Dans un langage d'aujourd'hui, on dirait que Sempronius est exposé à un risque sur sa richesse. La loterie a laquelle il est exposé peut être représentée par le vecteur $((4000, p = 0.1), (12000, 1 - p = 0.9))$ et représentée graphiquement par la distribution grise



En espérance, sa richesse est égale à $4000 + 0.9 \times 8000 + 0.1 \times 0 = 11200$ ducats.

Sempronius a alors une idée géniale : au lieu de ne prendre qu'un seul bateau il répartit sa richesse sur deux. En supposant que les bateaux suivent des routes également dangereuses mais indépendantes, il perdra les 8000 ducats si les deux bateaux font naufrage, 4000 si l'un des deux seulement sombre, 0 si les deux arrivent à bon port. La loterie.(sa richesse finale) devient alors $((4000, 0, 01 = p^2), (8000, 0, 18 = 2p(1 - p)), (12000, 0, 81 = (1 - p)^2))$ représentée par la distribution blanche. En espérance Sempronius ne gagne ni ne perd, mais on a l'intution que le risque auquel sa fortune est exposée a diminué : la probabilité des événements extrêmes a diminué au profit de l'augmentation d'un événement intermédiaire. Ce type de phénomène est central en finance et nous verrons comment le généraliser.

Un tiens vaut mieux que deux tu l'auras

L'entreprise "DEUTULAURA" exerce son activité dans un domaine risqué. Par exemple, son bénéfice est très lié à la météo du secteur W de l'île Fébooupa. Le détenteur d'une action de DEUTULAURA a une chance sur deux d'avoir un dividende de 2 euros et une chance sur deux d'avoir un dividende nul. L'entreprise UNTIENS exerce dans un secteur très calme : une action donne droit avec certitude à un dividende de un euro. En moyenne l'action DEUTULAURA et l'action UNTIENS donnent le même revenu. On sent bien que sur le marché elles n'auront pourtant pas le même prix! Si la livraison des dividendes est immédiate, l'action UNTIENS vaut évidemment 1 euro. Celle de DEUTULAURA vaudra moins! La modélisation que nous allons développer permettra d'évaluer cette décote! On montrera même que le prix de l'action se met sous la forme :

$$P = \frac{1}{2}\alpha_0 \times 0 + \frac{1}{2}\alpha_2 \times 2, \text{ avec } \alpha_0 + \alpha_2 = 1, \alpha_0 > \alpha_2$$

Comme si l'on pondérait avec des probabilités corrigées...

Comment partager entre les parties prenantes (stakeholders) d'un même projet?

Bill a un projet fondé sur ce que lui même qualifie être une idée de génie. Bien sûr, selon lui la rentabilité de ce projet est exceptionnelle! Evidemment, Bill n'a pas l'argent nécessaire à la mise initiale! Maurice, lui dispose d'une quantité d'argent dont il ne sait pas quoi faire. A priori les deux amis sont fait pour s'entendre. Mais une question fondamentale se pose : comment doit-on prévoir de partager "le résultat" entre Bill et Maurice? Le contrat de collaboration initial (financement et rémunération des acteurs) peut-il avoir une influence sur le résultat lui même? Cette influence dépend elle de l'information dont dispose maurice sur le projet de Bill?

Prenons un exemple simple : un propriétaire terrien (qui ne sait rien faire de ses mains) et un travailleur agricole (qui ne possède pas de terre) sont a priori faits pour s'entendre. On sent bien cependant que le contrat qui les lie peut avoir une incidence sur les résultats, sur la taille du gâteau (les produits de la récolte), qu'ils vont se partager. Par exemple si le propriétaire donne un salaire fixe au travailleur, celui-ci n'a pas beaucoup d'incitation à augmenter la production. Si au contraire, le travailleur loue la terre, et donne ainsi un loyer fixe au propriétaire, il aura toutes les incitations à développer au maximum la production. Evidemment, dans ce dernier cas, le risque (par exemple dû à la metéo) est intégralement supporté par le travailleur, alors que le revenu du propriétaire est totalement assuré!.

Finance de marché et finance d'entreprise

On a l'habitude de distinguer deux branches distinctes dans la finance. La finance de marché et la finance d'entreprise. La finance de marché a pour objectif de proposer des modèles qui permettent d'évaluer les actifs financiers. Etant donnés les caractéristiques de tel ou tel actif est-il possible de proposer des modèles qui permettent de "prédire" son prix ou de donner une formule d'évaluation? La finance de marché repose essentiellement sur la modélisation de l'offre et de la demande d'actifs dans un contexte aléatoire. La finance d'entreprise (corporate finance) analyse les problèmes associés au financement de l'entreprise. En particulier, le problème crucial qui se pose est la séparation entre "contrôle" et "financement" : ceux qui financent l'entreprise (les créanciers), qu'ils soient actionnaires ou prêteurs, ne sont pas ceux qui prennent les décisions. Il en résulte des problèmes d'incitation (comment faire en sorte que le management prenne des décisions en ligne avec les intérêts des actionnaires) de rationnement du crédit, de structuration du bilan.

La finance de marché repose essentiellement sur la modélisation de l'offre et de la demande de titres. Elle suppose un comportement rationnel des investisseurs qui cherchent à optimiser leurs revenus.

La finance d'entreprise analyse les problèmes d'incitation associés au financement des activités économiques.

Marchés financiers

Toute activité économique s'inscrit dans un cadre intertemporel et risqué. Intertemporel au sens où les recettes d'un projet sont souvent différées par rapport aux dépenses. Risqué, car souvent, les revenus associés sont aléatoires. Par exemple, une source de risque bien connue tient à la fluctuation des prix des biens. Un exploitant agricole qui ensemence ses terrains, n'encaissera la recette que plus tard, au moment de la récolte. Même plus, il ne sait pas à quel prix il pourra écouler sa production dont le volume, lui-même, est soumis à l'aléa climatique. De la même manière un exportateur est soumis aux flutuations des devises dans lesquels sont facturés ses produits. Ces agents économiques sont ainsi "exposés" à un profil de ressources et de dépenses, profil "déséquilibré" dans le sens où à certaines périodes il y a dépenses, à d'autres il y a recettes, et que celles ci, recettes et dépenses sont assujéties à être différentes selon l'état de la nature. On parle de "position", l'état initial du profil de recettes et dépenses. Un agent économique qui veut "lisser son profil", éviter les hauts et les bas, cherchera à acheter sur le marché financier un "profil complémentaire" qui augmente les recettes nettes quant elles sont basses et qui les diminue quand elles sont hautes. On voit ainsi qu'un "actif financier", au moins du point de vue théorique, n'est rien d'autre qu'un "profil" de recettes et de dépenses. Le marché financier est alors le lieu où s'échangent ces profils.

Le marché à terme d'un produit agricole par exemple est un marché sur lequel on fixe aujourd'hui le prix auquel on pourra vendre sa récolte demain. Ce prix fixé à l'avance n'est bien sûr pas celui qui prévaudra, au comptant. Un tel produit fiancier permet à l'exploitant agricole de se prémunir contre la varaition des cours. Les gouvernements, ou les entreprises ont des besoins de capitaux pour financer certains projets. Ils émettent des emprunts c′est-à-dire des contrats qui spécifient des flux financiers. Ces contrats, qu'on appelle obligations, sont typiquement des profils "intertemporels" d'encaissement et de décaissements. Alternativement, elles peuvent émettre des actions qui, elles donnent droit à des payments futurs aléatoires. Théoriquement, donc, un produit financier est un "papier" qui spécifie des flux (encaissements ou décaissements) futurs et aléatoires qui bénéficient à celui qui détient ce papier.

Lorsque ces papiers peuvent être échangés sur un marché à un certain prix on a ce que l'on appelle un marché financier.

Le marché obligataire, par exemple, (ou monétaire, quand il s'agit de court terme) est le lieu où s'échangent les obigations. Une action, c'est à dire un droit de propriété d'une entreprise, est un profil qui spécifie des recettes aléatoires (les dividendes, c'est-à-dire les profits de l'entreprise), elle s'échange sur le marché des actions.

A partir de ces actifs financiers, on peut définir des actifs dérivés, c'est à fire des actifs dont le "profil" (aléatoire ou intertemporel) est défini en fonction du profil d'un autre actif.

La finance de marché a pour objectif de comprendre comment les prix de ces différents actifs financiers sont déterminés. Comme tous ces marchés ne sont pas indépendants (par exemple les produits dérivés sont défini en fonction d'un autre actif), les prix de ces différents actifs sont liés, au moins théoriquement, entre eux. Ces relations traduisent le fait que deux actifs qui procurent le même profil ont nécessarement le même prix, sinon il y aurait ce que l'on appelle des opportunités d'arbitrage.

Institutions et instruments

Les acteurs

Les acteurs traditionnels du monde de la finance sont évidemment les banques. Depuis quelques décennies sont apparus de nouveaux acteurs sur les marchés financiers :les "fonds".

Les fonds sont des institutions chargées de gérer, en les investissant, les capitaux apportés par des investisseurs, des épargnants ou d'autres institutions. On peut citer :

- les fonds de pension ou de retraite (épargne des actifs)
- les mutual funds,
- les hedge funds (fonds spéculatifs)
- sovereign-wealth funds (fonds souverains)

A ces acteurs il convient de rajouter les compagnies d'assurance qui interviennent de plus en plus sur les marchés.

Les acteurs les plus influents sur les places financières sont les banques. En France, la loi bancaire de 1984 a permis l'affirmation définitive des banques universelles.

On distingue cinq métiers principaux qui caractérisent aujourd'hui les banques généralistes :

1. la banque de détail, ou retail, collectant les capitaux auprès de clients particuliers. Les filiales banques privées en sont des cas particuliers spécialisés pour des clients ayant de grosses capacités de financement.

2. la gestion d'actifs, ou Asset Management, AM, gérant des capitaux pour compte de tiers.

3. La Banque de Financement et d'Investissement (BFI), ou Corporate and Investment Banking regroupant trois missions principales :

   - le financement de projets,
   - le conseil en fusions et acquisitions,
   - le développement de produits financiers complexes et le trading pour compte propre sur les marchés de capitaux. C'est dans sur dernière branche que se situent les salles de marché développant des stratégies et produits financiers complexes, dits exotiques,
   - les services financiers, concernant le crédit à la consommation, les cartes de paiement, etc,
   - les services d'assurance, comprenant les portefeuilles d'assurance-vie, les contrats d'assurance-décès, accidents, habitation.

Organisation d'une salle de marché

Elle est séparée d'une part en type de produits financiers traités : actions, obligations, matières premières, monétaire, crédit (voir section suivante).

Quatre lieux de décisions se distinguent :

- le front-office directement relié aux marchés de capitaux. Y interviennent : vendeurs ou sales, structureurs développant les produits financiers complexes, traders, quants, élaborant les modèles d'évaluation des produits financiers, analystes,

- le middle-office, garantissant la bonne tenue des opérations réalisées par les traders via l'enregistrement dans les systèmes d'information,

- le back-office assurant la comptabilité, le paiement des opérations des traders, le contrôle des risques auditant les risques pris par les traders et vérifiant leurs transactions pour éviter toute erreur d'évaluation et fraude.

Les instruments

Deux instruments fondamentaux permettent aux entreprises de lever des fonds sur les marchés financiers : les actions et les obligations.

Actions

Une action est un titre de propriété représentant une fraction du capital d'une société. Nous pouvons distinguer pour un actionnaire ses droits économiques de ses droits juridiques. Les droitsroits économiques sont :

- Le droit au dividende : le solde bénéficiaire des comptes annuels d'une entreprise, égal aux recettes auxquelles on soustrait les charges, est réparti entre les réserves de la société, servant à son autofinancement, et les dividendes, affectés aux actionnaires.

- Le droit sur l'actif social : les actionnaires ont un droit proportionnel à la quantité d'actions qu'ils possèdent sur le patrimoine de l'entreprise, déduction faite des dettes. Ainsi, lors d'une augmentation de capital, les actionnaires ont une priorité sur les actions nouvellement émises.

Pour les droits juridiques on citera :

- Le droit à l'information : ils ont accès à tous les documents relatifs à l'activité et aux résultats de la société.
- Le droit de vote, permettant lors de l'assemblée générale annuelle de fixer les dividendes, prendre des décisions de gestion, délibérer sur les comptes de la société.
- Le droit d'exercer en justice : les actionnaires mécontents de la gouvernance de l'entreprise peuvent poursuivre les administrateurs en justice.

Les obligations

Les obligations sont des titres de dette pour les entreprises et de créances pour les souscripteurs.

Les obligations sont émises sur un marché primaire. La société s'engage à rembourser le capital emprunté à une échéance déterminée et à verser un intérêt annuel.

Une obligation est caractérisée par :

1. la valeur nominale ou faciale N définie à l'émission et à partir de laquelle sont calculés les intérêts ou coupons versés,
2. la maturité définissant la date finale de l'emprunt obligataire,
3. la valeur d'émission qui peut être égale à la valeur nominale (au pair), ou non (prime à l'émission),
4. le taux nominal qui détermine la valeur du coupon $d = r_0 V$et donc le revenu de l'obligation. Il peut être fixe ou variable,

Dérivés

Contrats à terme Une opération à terme est une opération au comptant différée dans le temps. L'acheteur et le vendeur se mettent d'accord sur les conditions d'un échange, qui s'effectuera à une date future (maturité) précisée par le contrat à terme. L'échange est irrévocable. Le prix de l'échange est fixé à la date d'élaboration du contrat mais l'échange n'est effectif qu'à la maturité. Nous verrons que le prix fixé aujourd'hui et correspondant au montant échangé à maturité d'un contrat à terme peut être calculé sans modélisation du cours du sous-jacent.

Options négociables Les options négociables sont des contrats permettant (il n'y a pas obligation) à son détenteur d'acheter (call) ou de vendre (put) une certaine quantité de biens à un cours fixé à la signature du contrat, appelé prix d'exercice (strike) K à la date T, maturité de l'option (cas des options européennes) ou jusqu'à T (cas des options américaines). Nous verrons dans ce cours les modèles qui permettent de calculer le prix de ce type de produit.

Obligation : transfert dans le temps

Dans ce premier chapitre nous introduirons les principales notions concernant les obligations. Les principes élémentaires de la notion d'arbitrage y sont décrits. Une application simple aux marchés dérivés y est présentée.

Une obligation est un emprunt émis par une entreprise ou un gouvernement. Elle constitue une promesse de remboursement sous la forme de versements échelonnés dans le temps. Cet actif financier peut lui même être échangé sur le marché. Par exemple, un particulier qui a acheté un emprunt d'état (donc qui a versé de l'argent) peut le revendre sur le marché à tout instant : il échange des recettes échelonnées dans le futur (le remboursement par l'Etat) contre une recette immédiate (le prix de vente de l'obligation). Selon le "terme" c'est à dire l'horizon des titres échangés, on parlera du marché obligataire (de quelques mois à plusieurs années) ou du marché monétaire (du jour à quelques mois).

A priori il existe de multiples formes d'obligations. Nous considérons ici les obligation à revenus fixes. Pour celle-ci il n'y a aucun aléa sur les montants des échéances qui sont fixées dès le début du contrat. Le seul risque éventuel est le défaut de l'emprunteur qui pourrait ne plus être en mesure d'honorer les engagements. Ce risque (que l'on appelle risque de signature) sera abordé dans la fin du cours où nous examinerons les problèmes spécifiques au financement de l'entreprise.

Dans toute la suite (jusqu'à nouvel ordre) nous nous plaçons à la date 0 et considérons des obligations qui spécifient des flux futurs. Ainsi nous examinons le marché à la date 0 de produits qui spécifient des flux futurs.

Definition 1 *Une obligation d à la date 0 est définie par les versements $d(t)$ qu'elle procure à chaque date t (future) et son prix p à la date 0.* $d = (d(1), d(2).....d(t)...)$

$T = \max(t,\, d(t) \neq 0)$ *est appelée maturité de l'obligation. Si* $T = +\infty$, d *est appelée rente perpétuelle.*

En général les $d(t)$ sont positifs, mais rien n'empêche qu'il ne soient quelconques. Il existe cependant des profils type que nous décrivons brièvement ici :

Definition 2 *- Obligations in fine :* $\forall t < T$ $d(t) = c$, $d(T) = c + N$, *où N est appelée "valeur faciale"., c le coupon et $r = c/N$ est le "taux d'intérêt nominal" de l'obligation. Cette obligation est proportionnelle à* $(r, r, ...r, ...(1 + r))$*.Lorsque l'emprunteur émet l'obligation et que $p = V$ on dit qu'elle est émise au pair.*

- Obligations à annuité constantes : $d(t) = a$ *(proportionnelle à* $(1, 1, ..., 1)$*)*

- Obligation à "zéro-coupon" de maturité T notée δ_T : $\forall t < T$ $\delta_T(t) = 0$, $\delta_T(T) = 1$: $(0, 0, ..., 0, 1)$.

Il est clair que le prix de ces obligations dépend de l'offre et de la demande de ces actifs. Cependant, on peut faire quelques remarques de bon sens sur des relations nécessaires que doivent vérifier les prix de ces actifs.

- Remarque 1 : si d_1 et d_2 sont deux obligations dont les prix sont p_1 et p_2. L'obligation qui procure les revenus $d(t) = d_1(t) + d_2(t)$ doit avoir comme prix $p = p_1 + p_2$.

- Remarque 2 : l'obligation qui rapporte $\lambda d(t)$ doit avoir le prix λp

Ces remarques sont moins évidentes qu'il n'y paraît. Elles reposent sur un raisonnement que l'on appelle raisonnement d'arbitrage. Supposons par exemple, par l'absurde, que $p > p_1 + p_2$. Un investisseur pourrait acheter les obligations d_1 et d_2 et revendre immédiatement l'obligation qui procure $d_1(t) + d_2(t)$ en faisant un bénéfice immédiat et potentiellement infini! L'idée essentielle des modèles d'évaluation des actifs financiers repose sur l'hypothèse qu'il ne peut y avoir d'opportunité d'arbitrage (c'est à dire de gain immédiat sans prise de risque en combinant des opérations d'achat et de vente).

Ces hypothèses impliquent que le prix des obligations doit être une forme linéaire du vecteur des versements. L'expression de cette forme linéaire est simple dès lors qu'on connaît le prix des obligations à zéro coupon qui constituent une base canonique de l'ensemble des obligations. En effet n'importe quelle obligation est une combinaison linéaire (triviale) d'obligations zéro-coupon. $d = \sum_{t=1}^{\infty} d(t)\delta_t$

Notation 3 *On note $B(t)$ le prix de l'obligation zéro coupon de maturité t : $\delta_t = (0, 0, ...0, 1)$*

Proposition 4 *Si toutes les obligations zéro coupon de maturités entre 0 et $T_{\max}$ sont disponibes et cotées sur le marché, alors l'absence d'opportunité d'arbitrage implique que le prix d'une obligation quelconque de maturié inférieure à $T_{\max}$ est égale à la "valeur actualisée" de ses versements. Le facteur d'actualisation est égal au prix de l'obligation zéro coupon correspondante.* $p = \sum_{t=1}^{T_{\max}} B(t)d(t)$

Zéro-coupons, courbe des taux, taux actuariel

Sur une période, le prix d'une obligation zéro coupon, par définition du taux d'intérêt vérifie: $B(1) = \frac{1}{1+r}$. En effet, pour pouvoir encaisser 1 euro demain, il faut débourser aujoud'hui $\frac{1}{1+r}$! Comment alors interpréter $B(2)$, $B(t)$?

L'analyse de la structure des prix des zéro-coupons est assez instructive. Pour faire cette analyse, examinons le marché, non seulement à la date 0 mais aussi à la date 1. Nous noterons $B(i, t)$ le prix à la date i de l'obligation zéro-coupon de maturité $t - i$ (elle donne droit à un euro à la date t).

Univers déterministe

Supposons que l'économie soit sans aléa. A la date 0 $B(0, 1)$ est le prix de l'obligation zéro coupon sur une période, $B(0, 2)$ le prix de celle de maturité 2.A la date 1, la nouvelle obligation zero coupon de maturité 1 qui rapportera 1 à la date 2 coûtera $B(1, 2)$(valeur connue dès la date 0, s'il n'y a pas d'incertitude!) à la date 1. A la date 0 on peut alors obtenir 1 euro à la date 2 de deux manières : la première consiste à acheter une obligation zéro coupon de maturité 2 (cela coûte $B(0, 2)$). La deuxième façon consiste à prévoir d'acheter à ladate 1 une obligation qui coutera $B(1, 2)$à la date 1. Pour avoir cette somme il faut acheter $B(1, 2)$ obligations zero coupon de maturité 1 à la date 0 ce qui coute $B(0, 1)B(1, 2)$.On a donc, en univers déterministe :

- $$B(0, 2) = B(0, 1)B(1, 2)$$

  Plus généralement :

  $$B(0, t) = \prod_{s=0}^{t-1} B(s, s + 1)$$

Supposons par exemple une économie stationnaire au sens où $B(s, s + 1)$ est constant égal à $\frac{1}{1+r}$. ceci veut simplement dire que les taux d'intérêt de court terme ne varient pas. On a alors $B(0, t) = \frac{1}{(1+r)^t}$.

Proposition 5 *Dans un monde stationnaire sans aléa le prix de n'importe quelle obligation de maturité finie s'exprime comme la valeur actualisée de ses versements :*

$$p = \sum_{t=1}^{T} \frac{d(t)}{(1 + r)^t}$$

Réciproquement, on peut définir le taux implicite d'une obligation, comme le taux constant qui soutient son prix.

Definition 6 *On appelle taux actuariel d'une obligation $(p, d(t))$ (où $d(t) \geq 0$) l'unique solution en r de l'équation* $p = \sum_{t=1}^{T} \frac{d(t)}{(1+r)^t}$.

Courbe des taux

A la date s étant donné l'ensemble des prix $(B(s,1),..,B(s,t)...)$ des zéro coupons. On définit la courbe des taux comme les taux sur une période $R(s,T)$ en fonction de la maturité T :

Definition 7 *Etant donnés les prix $B(s,s+T)$, par définition, la courbe des taux à la date s est la fonction $T \to R(s,T)$ définie par:*

$$B(s,s+T) = \frac{1}{(1+R(s,T))^T}$$

$R(s,T)$ est ainsi le taux actuariel de l'obligation zéro coupon de maturité t.

$$R(s,t) = \left(\frac{1}{B(s,s+T)}\right)^{1/T} - 1$$

La monotonie de $R(s,.)$ est très variable, on peut tout aussi bien avoir $R(s,.)$ croissante ou décroissante.

Le passage de $R(s,t)$ à $R(s+1,t+1)$ est appelé "évolution de la courbe des taux".

Détermination des zéro-coupons

Dans la vie réelle il n'existe pas de zéro coupon de telle sorte qu'il n'est pas directement possible d'observer les prix élémentaires $B(s,t)$.

En général on parvient à estimer ces prix en opérant des régressions multiples sur les produit existants.

Supposons que l'on ait K obligations disponibles sur une maturité $T \leq K$. On a :

$$p_k = \sum_{t=1}^{T} B(s,t) d_k(t)$$

En régressant p sur les $d(t)$, on déduit des estimateurs de B.

Dynamique des taux courts

Evidemment le monde réel s'écarte de la référence stationnaire sans alea. Des événements aléatoires non connus à la date 0 peuvent survenir à la date 1 et peuvent modifier le prix des zéro-coupons.

En univers déterministe on a toujours :

$$B(s,t) = \prod_{i=s}^{t-1} B(i,i+1)$$

De sorte que la donnée de l'évolution de $B(i,i+1)$ suffit à déterminer tous les prix de tous les zéro coupons.

Lorsque l'on introduit l'aléa, les prix $B(s,t)$ ne sont pas connus avant la date s. Cependant l'analyse qui précède nous permet de définir le conept de taux à terme.

Contrat à terme

L'analyse qui précède est un instrument puissant pour évaluer ce que l'on appelle les contrats à terme.

Definition 8 *Marché à terme. On parle de marché à terme lorsque les conditions de transaction sur les flux futurs sont décidés à l'avance : on décide à la date 0 (sans encaissements ni décaissements à cette date) d'opérer une transaction dans le futur, le prix de cette transaction étant fixé à la date 0.*

Taux forward

Supposons qu'un investisseur achète une obligation à zéro coupon de maturité $t+1$. Il paye aujourd'hui $B(0,t+1)$. Simultanément il peut emprunter la somme $B(0,t+1)$ à échéance t. A la date 0 les flux sont équilibrés. A la date t, l'investisseur doit payer $B(0,t+1)/B(0,t)$, (en effet,l'émetteur d'une obligation zéro coupon de maturité t rembourse 1 à l'échéance contre $B(0,t)$ aujourd'hui).

- Les flux sont les suivants : un décaissement égal à $B(0,t+1)/B(0,t)$ à la date t et un encaissement de 1 à la date $t+1$. Ces flux sont ceux d'un "projet d'obligation zéro coupon" de maturité 1 mais à la date future t. Aucun paiement n'a lieu aujourd'hui.

Definition 9 *On appelle zero coupon "forward" de maturité 1 (court terme) à la date t un actif qui prévoit aujourd'hui de prêter à la date t pour une période. Le profil est :* $(0,0,...,-\frac{1}{1+f_0(t)},1,0,0..)$, *dont la valeur à la date 0 est nulle (* $-\frac{1}{1+f_0(t)}B(0,t)+B(0,t+1)=0$). *Il en résulte nécessairement :*

$$\frac{1}{1+f_0(t)}=\frac{B(0,t+1)}{B(0,t)}=\frac{(1+R(0,t))^t}{(1+R(0,t+1))^{t+1}}$$

On appelle $f_0(t)$ *le taux forward, à terme. A cette date t là, l'obligation zéro coupon d'échéance 1 vaudra* $B(t,t+1)$ *au comptatnt, qui n'est égal à* $\frac{B(0,t+1)}{B(0,t)}$ *qu'en univers déterministe.*

Ce type d'instrument financier dérivé, permet de se protéger contre des variations de taux d'intérêt à court terme. Si je sais que je vais devoir emprunter dans six mois je peux acheter ce genre de contrat à terme si je redoute que le taux d'intérêt à une période à cette date devienne supérieur à f_t.

De même, il peut attirer les "spéculateurs". Acheter un zéro coupon forward correspond à un décaissement de $\frac{B(0,t+1)}{B(0,t)}$ à la date t. Au comptant, le même flux *de* 1 à la date $t+1$ coûte à cette date $B(t,t+1)$ Cette opération qui conduit à un gain de $B(t,t+1)-\frac{B(0,t+1)}{B(0,t)}$ à la date t, n'est profitable à un spéculateur que si $B(0,t)B(t,t+1)\geq B(0,t+1)$. c'est à dire si le taux d'intérêt de court terme baisse.

.

Section complémentaire : forwards et futures

Les forwards et les futures sont des marchés à terme : on convient à la date 0 (aujourd'hui) d'acheter (ou de vendre) une quantité d'un certain produit (matière première, produit agricole, or, devise, ou même produit financier) à une date t future, à un prix fixé aujourd'hui, livraison et réglement se faisant à la date t.

Les forwards et les futures se distiguent cependant dans la manière d'organiser cette transaction. Un "forward" est un contrat de gré à gré - en anglais "over the counter (sur le comptoir)", entre deux protagonistes qui s'engagent de manière privée, sur une transaction spécifique. Par exemple Mr A s'engage le 1° janvier à acheter à Mr B 100 onces d'or à 700$ l'once le 1° juillet. Livraison et paiement se feront le premier juillet.

Ce genre de contrat est évidemment susceptible de mal se terminer : il existe un risque de contrepartie. Supposons par exemple que le 1° juillet l'or cote 720$ l'once. Mr B aura la tentation de faire défaut, c'est à dire de ne pas livrer l'or.

Une deuxième remarque mérite d'être faite : il n'est pas besoin que MrB possède l'or qu'il a promis. A l'échéance il suffit d'opérer un réglement en cash entre acheteur et vendeur. Si le prix de l'or au comptant (spot) est plus élevé que le prix négocié à terme, le vendeur paie la différence à l'acheteur.

Ces deux remarques ont conduit à la création de marché de futures. Ces marchés portent sur des transactions standardisées (par exemple 100 onces d'or 1° juillet). Acheteurs et vendeurs agissent indépendemment et un intermédiaire se charge du rôle de chambre de compensation (clearing house).

Supposons par exemple que MrA achète le 1° janvier un contrat "100 onces d'or juillet" à 700$ l'once. 700$ est le prix coté pour ce contrat le 1° janvier mais il ne sera effectivement payé que le 1° juillet. Pour éviter le risque de défaut on opère cependant des appels de marge : si le 2 janvier le "100 onces d'or juillet" cote 710$, la chambre de compensation opère un appel de marge des vendeurs vers les acheteurs de 10$X100=1000$ par contrat. et ainsi de suite. Le 1° juillet, par définition, le cours du contrat "100 onces d'or juillet" est strictement égal au prix spot de 100 onces d'or, de sorte que le bilan global est exactement le même qu'avec un forward (sans échange matière).

Absence d'opportunité d'arbitrage

Dans cette section nous allons voir comment les prix "futures" et les prix spots sont reliés. Nous allons commencer par des futures sur des produits stockables (or, devises, certaines matières premières...)

Notation 10 *on note p_t^T le prix (coté à la date t) pour livraison et paiement à la date T. On note $B(t,T)$ le prix à la date t de l'obligation zéro coupon de maturité $(T-t)$ (c'est le prix que l'on doit payer à la date t pour avoir 1 euro à la date T)*

- $p_t^T B(t,T)$ est donc le prix que l'on doit payer à la date t pour disposer d'une unité du produit à la date T
- Il existe une autre façon d'obtenir la même chose : acheter le produit immédiatement et le stocker! Soit alors s le coût de stockage unitaire prévisible sur la durée $T-t$ et payé (pour simplifier) en fin de période.

Proposition 11 *L'absence d'opportunité d'arbitrage impose :*

$$\begin{aligned} p_t^T B(t,T) &= p_t^t + B(t,T)s \\ p_t^T &= (1+R(t,T-t))^{T-t} p_t^t + s \end{aligned}$$

où $R(t,T-t)$ est le taux d'intérêt (par période) associé à la maturité $T-t$.

Dès lors que s est positif, p_t^T est plus grand que le prix au comptant de la date t. Il existe cependant des cas où p_t^T est plus petit. Dans ce cas tout se passe comme si s était négatif : le fait de disposer du produit entre t et T génère un bénéfice. La possibilité de pouvoir en disposer à tout instant a une valeur positive.

Application à un marché à terme monétaire

Le produit standardisé (contrat sous-jacent) est ici un emprunt standardisé: c'est ce qu'on appelle un *emprunt notionnel.* Celui-ci est déterminé par sa maturité et son type. Considérons par exemple les prêts interbancaires à trois mois (un quart d'année), au comptant, sur les marchés non européens, ce type de prêt interbancaire se traite à un taux d'intérêt appelé LIBOR 3mois. C'est un contrat standard de nominal 1 000 000$. Il 'agit de prêter ou d'emprunter 1 000 000 $ sur 3 mois.

Avec les notations du cours, considérons le marché à terme de ce type de contrat. Fixons la période de référence à l'année. Vu de la date 0, un contrat à l'échéance t procure (pour l'acheteur) un flux négatif de 1M$ à la date t et un flux positif égal à $1M(1 + f_0(t)\frac{1}{4})$ trois mois après. $f_0(t)$ est le taux d'intérêt annuel associé coté à la date 0 pour la date t.

La relation du cours nous informe que l'absence d'opportunité d'arbitrage implique (en M$):

$$
\begin{aligned}
-B(0,t) \times 1 + B(0,t+1/4) \times 1 \times \left(1 + f_0(t)\frac{1}{4}\right)) &= 0 \\
\left(1 + f_0(t)\frac{1}{4}\right) &= \frac{B(0,t)}{B(0,t+1/4)}
\end{aligned}
$$

Ainsi théoriquement, si à la date 0, la courbe des taux est bien définie, alors le taux à terme est lui aussi parfaitement défini.

$$
\begin{aligned}
\left(1 + f_0(t)\frac{1}{4}\right) &= \frac{(1 + R(0,t+1/4))^{t+1/4}}{(1 + R(0,t))^t} \\
f_0(t) &\simeq R(0,t+1/4) + 4t(R(0,t+1/4) - R(0,t))
\end{aligned}
$$

.

Evaluation par arbitrage, incertitude

L'objectif de ce chapitre est de présenter les principes de bases qui président aux méthodes d'évaluation par arbitrage. Il va nous permettre aussi de fixer quelques notations qui nous serviront par la suite.

Incertitude

Nous allons adopter ne modélisation de l'incertitude extrêmement rudimentaire. Un état du monde e est une réalisation particulière de l'ensemble des possibles. Par exemple, à la date 0 l'état du monde à la date 1 est incertain. On note $E = \{e\}$, l'ensemble des possibles. A priori ici on supposera que l'ensemble E est fini.On dit que l'on est dans une situation de risque lorque l'état e n'est pas connu à l'avance mais que l'on connaît la probabilité de chacun des états de E. On dit que E est un espace probabilisé fini. On parle d'incertitude lorsqu'on connaît les possibles mais pas les probabilités, et d'incertitude radicale lorsque l'on ne sait rien du tout! Ici nous nous plaçons dans le cas de risque ou d'incertitude. Le passage au monde continu est un peu compliqué et relève plutôt d'un cours de probabilités ou de statistiques. Ici, pour faire comprendre les intuitions nous n'avons besoin que d'une description "discrète" de l'alea. Evidemment cela perd un peu en réalisme.

Comme on l'a vu dans l'introduction, les ressources des décideurs ou des acteurs économiques sont soumis à des aléas. On décrira ce phénomène en disant que la "richesse" ou le "revenu" d'un agent est une variable aléatoire (c'est-à-dire une application de E dans $\mathbb{R}$.

De la même manière, un actif financier est un bien économique particulier qui procure un revenu aléatoire. Par exemple, une action d'une entreprise donne droit à une participation à ses bénéfices qui sont aléatoires. Une action est un actif financier risqué au sens ou son revenu est aléatoire.

A priori, on peut être surpris que des individus ayant "peur" du risque achètent des actifs financiers risqués. Une partie de la réponse à cette question tient dans le fait que certains acteurs ont besoin de "se couvrir" c'est à dire d'acheter des actifs dont l'aléa vient en quelque sorte neutraliser sa propre exposition au risque.

L'objet de ce chapitre n'est pas de modéliser le comportement de demande ou d'offre d'actif. Il s'agit ici de décrire l'un des instruments fondamentals de la finance : l'évaluation par la méthode d'arbitrage.

Actifs financiers

On raisonne ici sur deux dates : la date 0 à laquelle s'opèrent les transactions et la date 1, date à laquelle on encaisse les revenus aléatoires associés.

Notation 12 *On note E l'ensemble des états de la nature (de la date 1). On suppose que E est fini de cardinal E (par abus de notation).*

Definition 13 *Un actif financier est une variable aléatoire :*

$\widetilde{d} : E \to \mathbb{R}^+,$

$e \to d(e)$

On note par la lettre p le prix de cet actif à la date 0

Acheter l'actif à la date 0 *entraine ainsi un décaissement p et donne droit au revenu aléatoire $a(e)$ à la date* 1.

On suppose qu'il existe à la date 0 un marché sur lequel K actifs financiers différents sont disponibles. On peut ainsi résumer l'ensemble des données par le tableau composé du vecteur prix et de la matrice des revenus :

$$p = [p_k]_{K,1} \, D = [d_{ki} = d_k(e_i)]_{K,E}$$

Par construction les vecteurs "colonne" sont associés aux actifs et à l'indice k et les vecteurs lignes aux états de la natures (à l'aléa).

Definition 14 *On appelle portefeuille, ou stratégie d'achat-vente, un vecteur z de $\mathbb{R}^k$ qui spécifie la quantité (positive ou négative) de chaque actif détenue (ou "achetée") par un décideur.*

La k ième composante du vecteur portefeuille est la quantité détenue d'actif correspondant . Il faut noter qu'une quantité négative est possible. On parle alors de "vente à découvert" : le décideur s'engage à payer les revenus correspondants à l'actif en question. Par exemple, vendre une action à découvert signifie simplement que le jour venu je dois donner le revenu associé à cette action.

A l'échéance le portefeuille z donne le revenu aléatoire v_z donné par la formule :

$$v_z = {}^t zD$$

v_z est un vecteur ligne dont chaque composante représente le revenu dans l'état de la nature correspondant.

Le coût à la date 0 du portefeuille z est évidemment égal à :

$$c(z) = {}^t zp$$

Definition 15 *On dit que le marché est complet si et seulement si on peut générer par au moins un portefeuille n'importe quel profil de revenu :*

$$\forall v \in \mathbb{R}^E, \exists z \in \mathbb{R}^K, {}^t zD = v$$

On comprend bien l'intérêt de la notion de marché complet : pouvoir générer n'importe quel revenu aléatoire signifie, en particulier que l'on peut "immuniser" n'importe quel risque auquel on est exposé. Si par exemple on a des recettes futures en dollar. Si les marchés sont complets on peut s'assurer à l'avance du taux de change en achetant l'actif financier qui varie en sens inverse.

Proposition 16 *Le marché est complet si et seulement si $rg(D) = E$, c'est–à–dire en particulier, si $K \geq E$: il y a au moins autant d'actifs que d'états de la nature.*

Dans le cas de marché complet, il est inutile d'avoir des actifs "redondants", on suppose alors que $K = E$. et la matrice A est carrée régulière.

Dans le cas de marchés complets il est intéressant de définir ce qu'on appelle les actifs d'Arrow, (du nom d'un prix Nobel d'Economie). Les actifs d'Arrow sont simplement les actifs qui procurent les profils correspondants à la base canonique de $\mathbb{R}^E$ (ce sont des sortes de zéro-coupons...):

Definition 17 *L'actif d'Arrow i donne 1 euro dans l'état e_i et 0 sinon :*
$\delta_i = (0, 0, ..., 1, 0, 0)$.

Quel est le coût de cet actif?

Le portefeulle associé est : ${}^t z = \delta_i D^{-1}$, son coût est $q(e_i) = {}^t zp = \delta_i D^{-1} p$

Proposition 18 *Si le marché est complet, le vecteur $q = D^{-1}p$ est le vecteur prix des actifs élémentaires d'Arrow. q_i représente le prix qu'il faut payer pour avoir un euro dans l'atat i et zéro sinon.*

Que se passe-t-il si la matrice D est telle qu'une des composantes du vecteur $D^{-1}p$ est négative? La situation dans ce cas serait asssez amusante. On pourrait encaisser de l'argent aux deux périodes. la valeur négative du prix à la date 0 et 1 euro si l'état de la nature se réalise à la date 1. Voila une façon de s'enrichir sans risque. On dit qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage si ce n'est pas possible.

Definition 19 *Si le marché est complet, l'absence d'opportunité d'arbitrage implique que le vesteur $D^{-1}p$ a toutes ses composantes strictement positives.*

Marché incomplet

Supposons maintenant, avec plus de réalisme que $K < E$. Peut-on généraliser ce qui précède?

Definition 20 *On dit que z est un portefeuille d'arbitrage si :*

$$\begin{cases} {}^t zD \geq 0 \\ {}^t zp \leq 0 \\ \textit{avec une inégalité stricte} \end{cases}$$

(dans cette définition ≥ 0 pour un vecteur, veut dire composante par composante)

Definition 21 *On dit que le marché vérifie la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) s'il n'existe pas de portefeuille d'arbitrage.*

Evidemmment, l'absence d'opportunité d'arbitrage implique que si deux actifs donnent les même revenus ils doivent avoir le même prix (sinon la différence des deux serait un portefeuille d'arbitrage). Cette remarque est à la base de la technique centrale d'évaluation des actifs financiers : la technique d'évaluation par "réplication". Si en combinant des actifs disponibles on arrive à reconstituer les revenus d'un autre actifs, alors le prix de cet actif est égal au prix de la combinanison.

Il existe un théorème de la finance qui permet de caractériser les marchés AOA :

Proposition 22 *Un marché est AOA si et seulement si il existe un vecteur q à composantes strictement positives tel que :*

$$p = Dq$$

Le prix de l'actif k est égal à la valeur "moyenne actualisée par q" de ses revenus :

$$p_k = \sum_E d_{ki} q_i$$

Remarquons que le prix de n'importe quel portefeuille s'exprime de la même façon :

$${}^t zp = {}^t zDq = v_z q = \sum_E v_i q_i$$

- Pour évaluer un portefeuille, ou le prix d'un actif "composite", il suffit de connaître le vecteur q.
- Nous verrons dans le chapitre suivant une application centrale de ce résultat à la valorisation d'options.

Une remarque centrale mérite d'être faite. Que vaut l'actif qui donne 1 dans tous les états de la nature? Par application directe de ce qui précède on trouve : $\sum_E q_i$. Or on sait depuis le chapitre précédent que le prix de cet actif s'écrit (par définition du taux d'intérêt sur 1 période) $\frac{1}{1+r_0^1}$. Si l'on pose $\pi_i = (1 + r_0^1)q_i$. On a $\sum_E \pi_i = 1$. π est une probabilité qui (a priori) n'a pas de lien avec la vraie probabilité. On verra par la suite comment π et la vraie proba sont reliées. On en déduit :

$$\begin{aligned} \text{prix du portefeuille z} \quad &: \quad {}^t zp = \frac{1}{1 + r_0^1} \sum_E \pi_i v_i \\ \text{c'est-à-dire} \quad &: \quad {}^t zp = \frac{1}{1 + r_0^1} \; \mathrm{E}_\pi [v] \\ & \quad\;\; \text{Espérance (sous } \pi\text{) actualisée des revenus} \end{aligned}$$

Remarques finales

Evaluer un actif par AOA suppose de calculer le (un) vecteur q. Quand les marchés sont complets, en particulier, cette méthode est très puissante pour évaluer les produits dérivés c'est à dire les actifs dont les revenus sont contingents au comportement. d'autres actifs. L'exemple le plus simple est celui concernant la valorisation d'options. Une option est un actif qui donne le droit d'acheter un autre actif à un prix fixé à l'avance. On voit facilement que le revenu de cet actif dérivé est conditionné au cours de l'actif sous jacent.

Quand les marchés ne sont pas complets, l'imaginantion des financiers est sans bornes et crée de manière permanente de nouveaux actifs qui permettent de tenir compte d'états de la nature non "couverts" par les actifs disponibles. Par exemple, les actifs "climatiques" sont des actifs dont les revenus sont contingents au climat. Les actifs "catastrophes" sont des actifs contingents aux événements catastrophiques...

Arbitrage dynamique, valorisation d'une option, formule de Black et Scholes

Modèle binomial à une période

Le modèle que nous allons présenter est une application importante du chapitre précédent. On considère le cas où il existe deux actifs financiers, deux dates (0 et 1) et deux "états de la nature". Le premier actif est un actif sans risque entre 0 et 1. Il rapporte 1 euro dans chacun des deux états de la nature. Son prix bien sûr à la date 0 est, par définition du taux d'intérêt, égal à $\frac{1}{1+r}$. En payant $\frac{1}{1+r}$ aujourd'hui on est sûr d'avoir 1 demain. Le deuxième actif est une action. Elle vaut S aujourd'hui (son prix sur le marché). Demain elle peut prendre deux valeurs possibles : elle peut monter et valoir uS ou baisser et valoir dS. Bien sûr on suppose que $u \geq d$.

On résume la situation par la matrice suivante :

prix\état	*Up*	*Down*
$\frac{1}{1+r}$	1	1
S	uS	dS

Un portefeuille composé d'une "quantité" de z_1 actifs sans risque et de z_2 actions, rapporte à la date 1 :

Up	*Down*
$z_1 + z_2uS$	$z_1 + z_2uS$

pour un coût de $\frac{z_1}{1+r} + z_2S$

Si on note A la matrice :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ uS & dS \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} S \\ \frac{1}{1+r} \end{bmatrix}$$

Le revenu v et le coût c de ce portefeuille z s'écrivent :

$$\begin{aligned} v(z) &= {}^t zD = \begin{bmatrix} z_1 + z_2uS & z_1 + z_2dS \end{bmatrix} \\ c(z) &= {}^t zp \end{aligned}$$

Dès lors qu'il y a deux états de la nature et deux actifs, on peut obtenir n'importe quel "profil" de revenu

si la marice A est inversible. C'est à dire dès lors que le système de deux équations à deux inconnues a une solution (unique) pour tout $v = \begin{bmatrix} v_u & v_d \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ uS & dS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_u & v_d \end{bmatrix}$$

C'est à dire lorsque $u > d$!

Dans ce cas le portefeuille qui donne le profil v s'écrit simplement :

$${}^t z = vD^{-1}$$

Son coût est :

$$c(v) = vD^{-1}p$$

A quelle condition y-a-t-il alors absence d'opportunité d'arbitrage? Regardons les coûts de chacun des portefeuille qui donnent les deux profils élémentaires suivants :

$$\begin{aligned} w_u &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ w_d &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On a évidemment :

$$D^{-1}p = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+r}\frac{1+r-d}{u-d} \\ \frac{1}{1+r}\frac{u-(1+r)}{u-d} \end{bmatrix} = q$$

Cela signifie qu'en payant aujourd'hui $q_u = \frac{1}{1+r}\frac{1+r-d}{u-d}$, on obtient 1 euro demain uniquement dans le cas où l'action a monté (état up). L'absence d'opportunité d'arbitrage impose que q_u et q_d soient strictement positifs. Sinon il serait possible d'obtenir 1 euro à la date 1 sans débourser un centime à la date 0 (où même en encaissant à la date 0!!).

Il y a absence d'opportunité d'arbitrage si et seulement si on a :

$$d < 1 + r < u$$

Dans ces conditions on peut valoriser n'importe quel actif financier.

Proposition 23 *Le prix d'un actif qui donne le profil* $\begin{bmatrix} v_u & v_d \end{bmatrix}$ *est égal à :*

$$vD^{-1}p = q_u v_u + q_d v_d = \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d}v_u + \frac{u-(1+r)}{u-d}v_d\right)$$

Bien sûr, on a en particulier :

$p = Dq$ c'est-à-dire :$\begin{cases} q_u + q_d = \frac{1}{1+r} \\ q_u uS + q_d dS = S \end{cases}$

Rappelons alors qu'une option d'achat est le droit d'acheter à la date 1 l'action au prix K. Si l'action vaut moins cher, on n'exerce pas l'option (cela n'a pas d'intérêt!). Si au contraire l'action vaut plus sur le marché on peut faire un bénéfice immédiat. Le profil de revenu est donc (on note $\max(x, 0) = x^+$):

$$\begin{bmatrix} (uS - K)^+ & (dS - K)^+ \end{bmatrix}$$

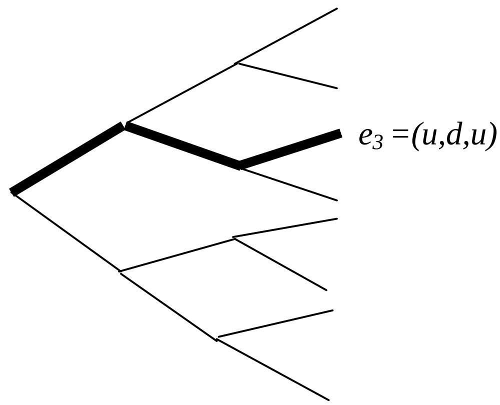
Le prix de cette option est donc :

$$q_u(uS - K)^+ + q_d(dS - K)^+$$

Modèle à temps discret, n périodes

Le modèle précédent peut être généralisé à plusieurs périodes. l'idée est la suivante : à chaque période le titre peut "monter" (cours multiplié par u) ou baisser (cours multiplié par d). Le titre sans risque, a un rendement par période constant égal à $1 + r$. On peut aisément représenter l'évolution des cours par un arbre. Pour un modèle à n périodes ($n + 1$ dates) il y a entre la première date 0 et la dernière date, n, 2^n histoires d'évolution possibles $(u, d, ...d, u, ...)$ qui débouchent sur $(n + 1)$ niveaux de cours possibles. Par exemple si le cours a monté k fois (c'est donc qu'il a déscendu $n - k$ fois, son cours vaudra $u^k d^{n-k} S$, et il y a C_n^k histoires possibles pour un tel cours

A chaque date t entre 0 et $n - 1$, on peut associer l'état de la nature correspondant à l'histoire de l'évolution des cours jusqu'à cette date. On note e_t un tel état de la nature. Dans cet état l'action vaut cote $S(e_t)$. Chaque état e_t a deux états de la nature "successeurs" à la date $t + 1$, l'un dans lequel l'histoire se poursuit par une montée $S(e_{t+1}) = uS(e_t)$, l'autre par une descente $S(e_{t+1}) = dS(e_t)$. Chaque état e_t, a ainsi un prédecesseur unique et deux successeurs. On note $e_{t+1} > e_t$ le fait que l'état e_t est l'unique prédecesseur de e_{t+1}.



Etat de la nature $e_3 = (u, d, u)$, son prédécesseur unique est $e_2 = (u, d)$

A la date t dans un état e_t , en considérant une stratégie d'investissement sur une seule période, tout se passe comme dans le modèle à 2 dates. Il en résulte, que l'absence d'opportunité d'arbitrage "intantané" impose qu'il existe q_u et q_d tels que :

$$\begin{aligned} q_u uS(e_t) + q_d dS(e_t) &= S(e_t) \\ q_u + q_d &= \frac{1}{1+r} \end{aligned}$$

C'est à dire comme tout à l'heure :

$$\begin{aligned} q_u &= \frac{1}{1+r}\left(\frac{(1+r)-d}{u-d}\right) \\ q_d &= \frac{1}{1+r}\left(\frac{u-(1+r)}{u-d}\right) \end{aligned}$$

On interprète ces deux valeurs comme les prix, à la date t des actifs élémentaires qui donnent 1 dans l'état de la nature correspondant à la date $t + 1$:

	Up	Down
q_u	1	0
q_d	0	1

Ainsi q_u est le prix qu'il faut payer à la date t pour obtenir le profil suivant à $t + 1$: 1 euro si l'action a monté entre t et $t + 1$, 0 sinon.

Notation 24 *Plus généralement on peut noter $q(e_{t+1}/e_t)$ le prix dans l'état e_t d'un euro disponible dans l'état e_{t+1}. Ce prix vaut ici soit q_u soit q_d selon que l'état e_{t+1}comporte une hausse ou une baisse en $t + 1$.*

Une fois cette remarque faite, il est extrêmement facile de déduire le prix à la date 0 d'un actif qui donne 1 euro dans un état e_p donné à la date p. Considérons en effet, à la date $p - 1$, l'état prédecesseur de e_p, .noté e_{p-1}.Pour avoir un euro à e_p il faut avoir $q(e_p/e_{p-1})$ euro à la date $p - 1$ dans l'état e_{p-1}, avec : $q(e_p/e_{p-1}) = q_u$ si le titre monte entre e_{p-1} et e_p, avec : $= q_d$ si le titre descend entre e_{p-1} et e_p, De proche en proche, en remontant le temps, pour avoir un euro dans l'état e_p il faut avoir à la date 0 : en déduit le prix à la date 0 :

$$\begin{aligned} q(e_p) &= q(e_p/e_{p-1})...q(e_{k+1}/e_k)...q(e_2/e_1)q(e_1/e_0) \\ \text{où } e_p &> e_{p-1}...e_{k+1} > e_k...e_2 > e_1 \\ & \quad \text{est l'unique chemin de } e_p \text{ à } 0 \end{aligned}$$

Ce résultat très simple va nous permettre de calculer le prix de n'importe quel actif financier variable aléatoire définie sur l'ensemble des états e_t.

Considérons par exemple un actif financier qui donne $a(e_t)$ à la date t si l'état e_t se réalise. On peut alors calculer très facilement le prix à la date 0 de cet actif.

Proposition 25 *Soit l'actif v dont le revenu est $v(e_t)$ à la date t. Son prix à la date 0 est donné par*

$$c(v) = \sum_{t=1}^{n} \sum_{e_t} q(e_t)v(e_t)$$

Considérons par exemple l'actif financier dérivé (imaginaire) suivant : son revenu est nul sauf à la date n où il donne 1 euro si le cours de l'action a monté exactement p fois (et donc baissé $n-p$ fois). Pour calculer le prix de cet actif il faut identifier les états e_t dans lesquels $a(e_t)$=1. Il s'agit des états e_n, tels qu'il y a eu p montées et $(n-p)$ baisses. Pour chacun de ces états $q(e_n) = q(e_n/e_{n-1})...q(e_{k+1}/e_k)...q(e_2/e_1)q(e_1/e_0) = q_u^p q_b^{n-p}$ qui est indépendant de l'ordre dans lequel les baisses et les hausses ont eu lieu. Il y a $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ tels états de la nature. On en déduit le prix de cet actif $C_n^p q_u^p q_b^{n-p}$.

Vérifions que le prix de l'actif sans risque qui donne 1 à la date n quoiqu'il arrive est bien égal à $\frac{1}{(1+r)^n}$. En effet d'après dce qui précède, ce prix est égal à $\sum_{p=0}^{n} C_n^p q_u^p q_b^{n-p} = (q_u + q_b)^n = \frac{1}{(1+r)^n}$

Vérifions que le prix de l'action est bien égal à S : Ce prix vaut $\sum_{e_n} q(e_n)S(e_n) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p q_u^p q_b^{n-p}(u^p d^{n-p})S = (q_u u + q_d d)^n S = S$

Notation 26 *On définit $\pi = (1+r)q_u$, et donc $1-\pi = (1+r)q_b$ (que l'on appelle "probabilités corrigées du risque").*

De la même manière : $\pi(e_t) = (1+r)^t q(e_t)$. On voit que par construction, $\sum_{e_t} \pi(e_t) = 1$.

$$c(v) = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^t} \sum_{e_t} \pi(e_t)v(e_t)$$

La valeur de l'actif est égale à la valeur actualisée de l'espérance de ses revenus calculée avec la distributionde probabilité π.

Prix d'une option en temps discret

Une option (d'achat) sur l'action S, (un "Call") négociée à la date 0, est le droit d'acheter cette action à la date n à un prix égal à K (prix d'exercice) fixé à lavance à la date 0.

On voit immédiatement que le revenu de cette option à la date n est exactement égal à (on note $\max(0, x) = x^+$.):

$$v(e_n) = (S(e_n) - K)^+$$

La valeur de cette option est donc égale à :

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{e_t} \pi(e_n)(S(e_n) - K)^+ \\ C &= \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{k/u^k d^{n-k} S \geq K} C_n^k \pi^k (1-\pi)^{n-k} (u^k d^{n-k} S - K) \end{aligned}$$

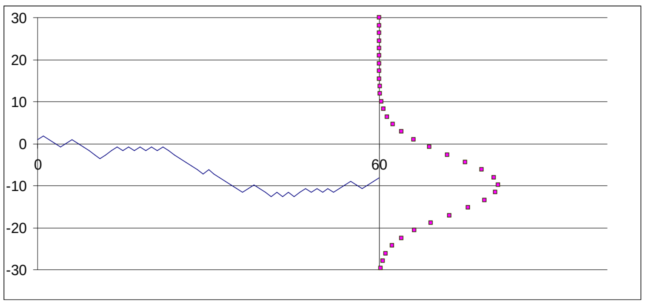
Extension au temps continu.

Marche aléatoire

Une marche aléatoire est un processus assez intuitif. Une variable X évolue au cours du temps (que nous supposons discret pour le moment) de la manière suivante :

Definition 27 *$\forall t = 0, 1, ..n$ $X(0) = X_0$, $X(t+1) = X(t) + \epsilon_{t+1}$ où ϵ_{t+1} est le résultat d'un tirage aléatoire : avec probabilité p, $\epsilon_{t+1} = s$, avec probabilité $(1-p)$ $\epsilon_{t+1} = -s$. Ainsi, à chaque instant, on tire au sort la variation de X entre t et $t+1$ selon une loi ici binomiale.*

Au cours du temps on voit assez intuitivement que X se déplace à chaque période, en moyenne, de $m = ps - (1-p)s = (p - 1/2)2s$.. Mais évidemment, plus le temps s'écoule plus X a des chances de s'éloigner de cette valeur. On peut imaginer un ivrogne sur une route qui à chaque instant fait un pas vers l'avant ou vers l'arrière. Même si l'on suppose qu'il tire son déplacement à pile ou face ($p = 1/2$), au bout d'un certain temps il sera assez loin de sa position de départ! A chaque instant, en moyenne son déplacement est nul, mais petit à petit il s'éloigne de sa position initiale. Le graphique suivant montre l'évolution d'une telle marche aléatoire ainsi que la distribution de probabilité des positions au temps terminal.



Marche aléatoire

Il existe un résultat fondamental de la statistique qui permet d'approcher la distribution de probabilité des positions terminales.

Proposition 28 *Si les ϵ sont tirées indépendamment, alors :*

$$\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + ...\epsilon_n - nm}{\sqrt{np(1-p)}2s} = \frac{X(1) - X_0 - nm}{\sqrt{np(1-p)}2s}$$

suit quand n tend vers l'infini une loi gaussienne $N(0,1)$, dite centrée réduite. (de densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$)

Marche aléatoire en temps continu

Comment généraliser le résultat précédent en temps continu? Fixons l'intervalle de temps à $[0,\ t]$. Et subdivisons cet intervalle en n périodes de durée $h = t/n$. Une marche aléatoire telle que définie plus haut s'écrit :

$X((k+1)h) = X(kh) + \epsilon_{k+1}$.

Ecrivons la variance de $X(t)$. Elle est égale à la somme des variances des variations intermédiaires (parce que les variations intermédiaires sont indépendantes entre elles):

$$var(X(t)) = n\text{var}(\epsilon)$$

Si var(ϵ) est indépendant de n alors on voit que multiplier les instants intermédiaires conduirait à une variance infinie. Pour que la variance reste finie, quand n tend vers l'infini,, il faut dont ajuster les variations instantanées de telle sorte que $n\text{var}(\epsilon)$ tende vers une limite finie. Prenons $s = \sigma\sqrt{t/n}$, la variance de ϵ est alors égale à $\frac{4p(1-p)\sigma^2 t}{n}$.

Calculons alors l'espérance de $X(t)$:

$$E(X(t)) = X_0 + nE(\epsilon) = X_0 + \sqrt{n}(p - 1/2)2\sigma\sqrt{t}$$

De la même manière, éviter que le processus n'explose implique que $\sqrt{n}(p - 1/2)$ reste fini. On prend alors $p = 1/2 + \frac{\mu\sqrt{t}}{2\sigma\sqrt{n}}$. Avec ces deux hypothèses on a alors :

$$\begin{aligned} var(X(t) &\rightarrow \sigma^2 t \\ E(X(t)) &\rightarrow X_0 \ + \mu t \end{aligned}$$

On peut alors appliquer une version un peu plus complexe du théorème précédent et affirmer :

Proposition 29 *Si l'on définit une marche aléatoire X entre 0 et t par $X(0) = X_0, X\left((k+1)\frac{t}{n}\right) = X(k\frac{t}{n}) + \epsilon_{k+1}$. où les variables ϵ_k sont des variables binomiales valant $\sigma\sqrt{t/n}$ avc probabilité $p = 1/2 + \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{t/n}$ et $-\sigma\sqrt{t/n}$ avec probabilité $1-p$., où σ et μ sont des constantes données. Alors quand n tend vers l'infini, $X(t) - X_0$ suit une loi normale d'espérance μt et de variance $\sigma^2 t$.*

Cette proposition va nous permettre d'énoncer un des résultats les plus célèbres et les plus utilisés de la finance de marché.

La formule de Black et Scholes

Considérons la valeur de l'option calculée dans le modèle discret :

$$C = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{i/u^i d^{n-i} S \geq K} C_n^i \pi^i (1-\pi)^{n-i} (u^i d^{n-i} S - K)$$

On peut la réécrire :

$$\begin{aligned} C \quad = & \sum_{i/u^i d^{n-i} S \geq K} C_n^i \left(\frac{\pi u}{1+r}\right)^i \left(\frac{(1-\pi)d}{1+r}\right)^{n-i} S \\ & - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n \sum_{i/u^i d^{n-i} S \geq K} C_n^i \pi^i (1-\pi)^{n-i} K \end{aligned}$$

Que nous écrivons de manière condensée :

$$C = \Phi S - \frac{1}{(1+r)^n} \psi K$$

Cette expression mérite un commentaire.

Examinons le premier terme ΦS. Remarquons d'abord que $\pi u + (1-\pi)d = 1 + r$, (voir plus haut). Considérons alors le processus binomial suivant :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= \ln(S(k+1)) = \ln(S(k)) + \epsilon_{k+1} \\ \text{avec } \epsilon_{k+1} &= \ln(u) \text{ avec probabilité } \frac{\pi u}{1+r} \\ \text{avec } \epsilon_{k+1} &= \ln(d) \text{ avec probabilité } \frac{(1-\pi)d}{1+r} \end{aligned}$$

Le premier terme de l'équation donnant le prix du call est simplement égal à la valeur initiale S multipliée par la probabilité que le processus binomial atteigne une valeur finale $X(n) \geq \ln(K)$.

Le second terme est similaire. Considérons le processus binomial :

$$\begin{aligned} Y(k+1) &= \ln(S(k+1)) = \ln(S(k)) + \epsilon_{k+1} \\ \text{avec } \epsilon_{k+1} &= \ln(u) \text{ avec probabilité } \pi \\ \text{avec } \epsilon_{k+1} &= \ln(d) \text{ avec probabilité } (1-\pi) \end{aligned}$$

Le second terme de léquation donnant le prix du call est simplement égal à la valeur actualisée au taux r du prix d'exercice K multipliée par la probabilité que le processus binomial atteigne une valeur finale $Y(n) \geq \ln(K)$.

L'objectif est donc de calculer les lois de distribution des deux processus X et Y. *Avec* ce qui précède, si on opère un passage à la limite, on va trouver des distributions gaussiennes. Il s'agit alors tout simplement de trouver les paramètres de ces distributions gaussiennes limites de X et Y.

Considérons alors l'intervalle [0,t], subdivisé en n périodes.

D'après ce qui précède on doit poser, σ étant un paramètre donné:

$$\begin{aligned}
\ln(u) &= \sigma\sqrt{\frac{t}{n}} \Longleftrightarrow u = e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} \\
\ln(d) &= -\sigma\sqrt{\frac{t}{n}} \Longleftrightarrow d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}
\end{aligned}$$

Posons de la même manière :

$$1 + r = e^{\rho\frac{t}{n}} \Longleftrightarrow r \sim \rho\frac{t}{n}$$

Calculons la probabilité d'évolution du processus X (on pose $h = \frac{t}{n}$):

$$\begin{aligned}
p_X = \frac{\pi u}{1+r} &= \frac{1}{1+r}\left(\frac{(1+r)-d}{u-d}\right)u \\
&= \frac{1}{e^{\rho h}}\frac{e^{\rho h} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}e^{\sigma\sqrt{h}}
\end{aligned}$$

Un développement limité en $\sqrt{h}$ donne immédiatement :

$$p_X = \frac{1}{2} + \frac{\rho + \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{h}$$

Calculons de même la probabilité d'évolution du processus Y .

$$p_Y = \pi = \left(\frac{(1+r)-d}{u-d}\right) = \frac{e^{\rho h} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}$$

Un développement limité en $\sqrt{h}$ donne immédiatement :

$$p_Y = \frac{1}{2} + \frac{\rho - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{h}$$

Proposition 30 *Le processus $X(t) - \ln(S)$ suit une loi normale (gaussienne) d'espérance $(\rho + \frac{\sigma^2}{2})t$ et de variance $\sigma^2 t$, ce qui revient à dire que $\frac{X(t)-\ln(S)-(\rho+\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$ suit une loi normale centrée réduite (d'espérance nulle et de variance 1)*

De même,le processus $Y(t) - \ln(S)$ suit une loi normale (gaussienne) d'espérance $(\rho + \frac{\sigma^2}{2})t$ et de variance $\sigma^2 t$.

Notation 31 *On note N la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite :*

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

(Il s'agit de $\pi = 3,14159265..$, ici!)

On a évidemment :

$$N(+\infty) = 1, N(x) = 1 - N(-x)$$

$N(x)$ mesure la probabilité qu'une variable aléatoire normale prenne une valeur inférieure à x.

Revenons alors à l'expression qui donne le prix de l'option :

$$C = \Phi S - \frac{1}{(1+r)^n}\psi K$$

Φ est la probabilité que $X(t)$ soit supérieur à $\ln(K)$, c'est à dire :

$$\begin{aligned}
\Phi &= \Pr\left(X(t) \geq \ln(K)\right) \\
\Phi &= 1 - N\left(\frac{\ln(K) - \ln(S) - (\rho + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\
\Phi &= N\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{Ke^{-\rho t}}\right) + \frac{\sigma^2}{2}t}{\sigma\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}$$

Ψ est la probabilité que $Y(t)$ soit supérieur à $\ln(K)$, c'est à dire :

$$\begin{aligned}
\psi &= \Pr\left(Y(t) \geq \ln(K)\right) \\
\Psi &= 1 - N\left(\frac{\ln(K) - \ln(S) - (\rho - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\
\Psi &= N\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{Ke^{-\rho t}}\right) - \frac{\sigma^2}{2}t}{\sigma\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}$$

Proposition 32 *Le prix d'une option sur une action S, de "volatilité σ" au prix d'exercice K, exerçable à la date t est égal à :*

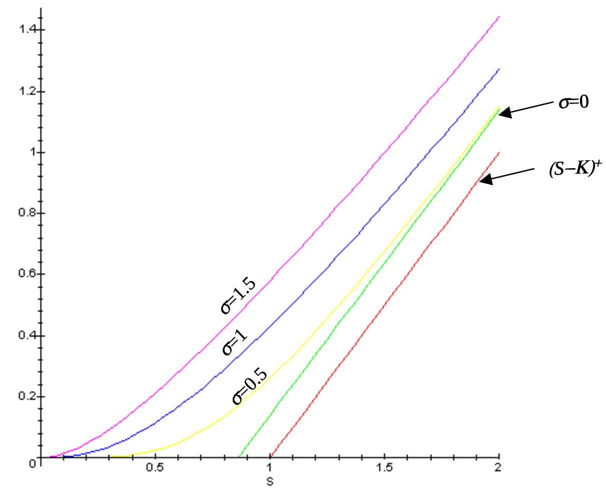
$$C = N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-\rho t}$$

où

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{Ke^{-\rho t}}\right) + \frac{\sigma^2}{2}t}{\sigma\sqrt{t}} \\
d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{Ke^{-\rho t}}\right) - \frac{\sigma^2}{2}t}{\sigma\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

Cette formule est la plus célèbre de la finance et est utilisée de manière quotidienne par tous les opérateurs sur les places financières pour estimer les valeurs théoriques des options ou pour estimer la volatilité en fonction du cours (volatilité implicite).

Le graphique suivant montre les variations de C quand S et σ varient pour $K = 1$ et $\rho = 15\%$ fixé.



Prix du Call en fonction de S et σ

Critère de décision en incertitude

Introduction

La gestion du risque dans une entreprise est multiforme. Par exemple, gérer le risque de "liquidité" consiste à anticiper et contrôler les variations de cash-flow qui résulteraient de variations d'activité. Gérer les stocks de matière procède aussi du même soucis. De la même manière, un particulier qui cherche à placer son argent fait face à des possibilités d'investissement qui comportent des risques. Ainsi, l'attitude face au risque est un des déterminants fondamentaux de la demande d'actifs financiers. Un exportateur, par exemple, qui vend en dollars un produit que ne sera payé que dans un mois court un risque de change. Si le dollar baisse il y perd, si le dollar monte il y gagne. D'une certaine manière cet exportateur est confronté à un rique. Il peut l'accepter s'il est joueur ou s'il spécule sur la hausse, il peut au contraire cehrcher à "se couvrir", c'est à dire à s'assurer un revenu donné quitte à payer ce service d'assurance.

D'une certaine manière l'exportateur ci dessus est confronté à une loterie. Une question simple qui se pose est de modéliser comment un décideur compare deux loteries. Une loterie par définition est un revenu "risqué". Comment le décideur apprécie-t-il ce risque? Comment compare-t-il deux situations risquées. Ce chapitre est destiné à modéliser la décision en incertitude. Nous allons mettre en évidence un ensemble d'instruments simples largements utilisés dans les institutions financières pour modéliser les comportements individuels.

Un exemple

Pour comprendre l'attitude d'investisseurs face au risque, il est utile de considérer un cas d'école extrêmement simple. On considère deux loteries que l'on appelle la loterie a et la loterie b.

Dans la première loterie, a, on gagne 2 euro avev une chance sur 2, et on gagne 0 euro avec 1/2.

Dans la seconde loterie, b, on gagne avec certitude β euros.

	pile	face
a	2	0
b	β	β

Si l'on demande à un individu de choisir la loterie qu'il préfère jouer, sa réponse va dépendre évidemment à la fois de son "attitude" face au risque et de la valeur de β. Il est certain cependant que certaines valeurs de β ne posent pas de problème.

Ainsi, clairement, si $\beta = 0$, tout individu préférera jouer à la loterie a!

De même, si $\beta = 2$, tout individu choisira la loterie b!

On peut donc affirmer, par un raisonnement de continuité qu'il existe un niveau seuil $\widehat{\beta}$, a priori différent selon l'individu, tel que :

$\beta < \widehat{\beta} \Longrightarrow$ l'individu choisit a

$\beta > \widehat{\beta} \Longrightarrow$ l'individu choisit b

$\beta = \widehat{\beta} \Longrightarrow$ l'individu est indifférent

D'une certaine manière, la valeur du seuil donne une indication sur le degré de risquophobie de notre individu.

Si $\widehat{\beta}$ est très petit, notre homme préfère largement les choses sûres!

Si $\widehat{\beta}$ est très grand, il faut beaucoup d'argent pour le dissuader de jouer!

La position de $\widehat{\beta}$ par rapport à l'espérance de la loterie a, qui est égale à $E(a) = \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{2}.0 = 1$, précise les choses :

- On dira que l'individu est risquophobe si $\widehat{\beta} < 1$, risquophile si $\widehat{\beta} > 1$, et neutre au risque si $\widehat{\beta} = 1$.

Le paragraphe suivant permet de généraliser ce type d'analyse.

Espérance d'utilité

Il existe une manière relativement simple de modéliser le phénomène décrit dans l'exemple. Pour fixer les idées nous noterons $\widetilde{x}$ une loterie, c'est à dire une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé donné décrivant les gains de l'individu. Dans les illustrations simples, le nombre d'états de la nature (événements) est fini de sorte que x ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. On notera $E = \{e\}$ l'ensemble des états de la nature, $x(e)$ la valeur prise par x dans l'état e et $\pi(e)$ la probabilité de l'état e.

Definition 33 *L'espérance de la variable $\widetilde{x}$ est par définition :* $E(\widetilde{x}) = \sum_{e\in E} \pi(e)x(e)$

Nous introduisons alors le critère dit d'espérance d'utilité :

Definition 34 *Le critère de décision vérifie l'hypothèse d'epérance d'utilité si pour toute loterie $\widetilde{x}$, il s'écrit sous la forme :* $V(\widetilde{x}) = E(u(\widetilde{x})) = \sum_{e\in E} \pi(e)u(x(e))$ *où u est une fonction continue croissante de $\mathbb{R}$ dans$\mathbb{R}$. qui est propre à l'individu.*

Ainsi sous cette hypothèse, le décideur préfère la lotterie y à la loterie x si et seulement si $E(u(\widetilde{y})) > E(u(\widetilde{x}))$

Le décideur évalue donc une loterie en calculant l'espérance d'une fonction donnée de ses gains. Le problème qui se pose alors est la définition de cette fonction u propre au décideur.

Prenons un individu ayant un revenu certain w_0. Proposons lui une loterie $\widetilde{x}$ d'espérance nulle. Dans un certain sens on lui de mande de "prendre un risque" au sens où (comme l'epérance de $\widetilde{x}$ est nulle, cela veut dire que x est parfois négatif, ce qui ampute w_0, soit positif ce qui améliore l'ordinaire). Notons $\widetilde{y} = w_0 + \widetilde{x}$. Clairement, l'individu est risquophobe s'il refuse de prendre ce type de risque.

Definition 35 *Le décideur est risquophobe si quel que soit $w_0 \in \mathbb{R}$, et quelle que soit la loterie d'espérance nulle $\widetilde{x}$, il refuse de prendre le risque (il préfère rester avec son revenu certain w_0):*

$$E(u(w_0 + \widetilde{x})) < u(w_0)$$

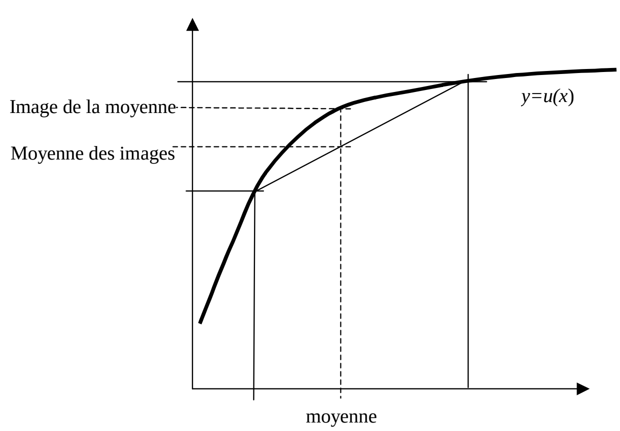
c'est-à-dire :

$$\forall \widetilde{y}, E(u(\widetilde{y})) < u(E(\widetilde{y}))$$

"l'image par u de la valeur moyenne (espérance) est plus grande que la valeur moyenne des images par u"

Cette propriété par rapport à l'opérateur espérance, ou moyenne, est une propriété de concavité de la fonction u. *En* effet, une fonction concave, par définition est une fonction telle que l'image de la moyenne est plus grande que la moyenne des images : le graphe entre deux points quelconques passe au dessus de la corde entre ces deux points.

$$\forall x_1, x_2, \forall \lambda \in [0,1], u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq \lambda u(x_1) + (1-\lambda)u(x_2)$$



Fonction concave : image de la moyenne de deux nombres, et moyenne des images de ces nombres

Bien sûr, de la même façon le décideur sera risquophile si la fonction u qu'il utilise est convexe, c'est à dire telle que la moyenne des images est supérieur à l'image de la moyenne.

Nous allons alors définir quelques concepts importants :

Definition 36 *(Equivalent certain). On appelle équivalent certain d'une loterie $\widetilde{y}$ pour un décideur u, le nombre réel $e_u(\widetilde{y})$ solution de l'équation en e:*

$$E(u(\widetilde{y})) = u(e)$$

C'est la loterie sans risque équivalente à la loterie initiale.

Pour un individu risquophobe, il est facile de voir que l'équivalent certain est inférieur à l'espérance (u est croissante):

$$u(e_u(\widetilde{y})) = E(u(\widetilde{y})) \leq u(E(\widetilde{y}))$$

Definition 37 *On appelle prime de risque l'écart entre espérance et équivalent certain.*

$$P_u(\widetilde{y}) = E(\widetilde{y}) - e_u(\widetilde{y})$$

On voit intuitivement que plus un décideur est risquophobe c'est à dire plus la fonction u est concave plus la prime de risque est grande et plus l'équivalent certain est petit.

Definition 38 *Le décideur u est "plus risquophobe" que le décideur v si et seulement si il existe une fonction concave et croissante telle que $u = g \circ v$.*

On voit facilement que, si u est plus risquophobe que v : $\forall \widetilde{y}$, $e_u(\widetilde{y}) \leq e_v(\widetilde{y})$.(démonstration laissée à titre d'exercice).

Indice d'aversion au risque

On aimerait alors définir une sorte d'indice de risquophobie. L'idée est la suivante. Considérons une loterie donnée $\widetilde{x}$ d'epérance nulle et de variance égale à σ^2. On va alors examiner les loteries de la forme $\widetilde{y} = w_0 + t\widetilde{x}$, où t est "petit". On cherche alors une expression approximée de la prime de risque $P_u(t)$, en fonction de t. L'idée essentielle est de calculer les deux premières dérivées de π au voisinafge de 0 pour écrire :

$$P(t) = P(0) + tP'(0) + \frac{t^2}{2}P''(0)$$

On sait évidemment que $P(0) = 0$: quand t est nul la loterie est certaine, il n'y a pas de prime de risque.
Ecrivons ensuite la définition de la prime de risque, et différentions :

$$\begin{aligned} Eu(w_0 + t\widetilde{x}) &= u(w_0 - P(t)) \\ E\left[\widetilde{x}u'(w_0 + t\widetilde{x})\right] &= -P'(t)u'(w_0 - P(t)) \end{aligned}$$

Ce qui donne, pour $t = 0$:

$$E\left[\widetilde{x}\right] u'(w_0) = -P'(0)u'(w_0 - P(0))$$

Comme l'épérance de $\widetilde{x}$ est nulle, on en déduit que $P'(0) = 0$.
Différentions une nouvelle fois :

$$E\left[\widetilde{x}^2 u''(w_0 + t\widetilde{x})\right] = -P''(t)u'(w_0 - P(t)) + (P'(t))^2 P'(w_0 - P(t))$$

Ce qui donne pout $t = 0$:

$$\sigma^2 u''(w_0) = -P''(0)u'(w_0)$$

Proposition 39 *La prime de risque (pour de petits risques) s'écrit :*

$$P(t) = \frac{(t\sigma)^2}{2}\frac{-u''(w_0)}{u'(w_0)}$$

$$P(\widetilde{y}) = \frac{var(\widetilde{y})}{2}\left[\frac{-u''(w_0)}{u'(w_0)}\right]$$

Produit de deux termes : la moitié de la variance du risque et le quotient des dérivées secondes et premières de u.

Definition 40 *On appelle Indice d'aversion au risque:* $I_u(w_0) = \frac{-u''(w_0)}{u'(w_0)}$.

Il est assez facile de voir que plus un individu a un indice d'aversion au rique élevé, plus il est risquophobe. L'indice mesure le degré de concavité *locale* de u.

Fonctions u usuelles

Le paragraphe précédent peut nous aider à définir des fonctions u qu'il est "naturel" d'utiliser. Parmi celles que l'on utilise fréquemment :

Definition 41 *Fonction CARA :* $u(w) = C - e^{-\rho w}$ *dont l'indice d'aversion au risque est égal à* ρ

Fonction quadratique : $u(w) = w - \frac{1}{2k}w^2$, *définie sur [0,k] dont l'indice d'aversion au risque est égal à* $\frac{1}{k-w}$ *qui est une fonction croissante de* w.

Fonction HARA : $u(w) = \frac{1}{(1-a)}x^{(1-a)}$, $u(w) = \ln(w)$

La fonction CARA est intéressante à plus d'un titre. En particulier on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 42 *Si* $\widetilde{y}$ *suit une loi gaussienne (normale) d'espérance* m *et de variance* σ^2, *si* u *est CARA alors :*

$$E[u(\widetilde{y})] = u(m - \frac{1}{2}\rho\sigma^2)$$

C'est à dire que l'équivalent certain est $e(\widetilde{y}) = m - \frac{1}{2}\rho\sigma^2$, *et donc que l'approximation de la prime de risque calculée plus haut est ici exacte!*

Dominance stochastique, comparaison de situations risquées

Les développements précédents permettent de donner un sens à une expression très commune comme "cette décision est nettement plus risquée que telle autre".

Nous adopterons les définitions précises suivantes :

Definition 43 $\widetilde{x}$ *et* $\widetilde{y}$ *étant deux variables aléatoires prenant leurs valeurs sur [A,B]. On dit que* $\widetilde{x}$ *est stochastiquement dominée au second ordre par* $\widetilde{y}$ *si tout individu risquophobe (ayant une fonction d'utilité concave croissante) préfère* $\widetilde{y}$ *à* $\widetilde{x}$.

On dit que $\widetilde{x}$ *est plus risquée que* $\widetilde{y}$ *si , de plus* $E(\widetilde{x}) = E(\widetilde{y})$

Posons $1_x(s)$, la fonction indicatrice de $[A, x]$, c'est la dérivée de la fonction (de s) $\min(x, s)$. On obtient en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
u(x) &= u(A) + \int_A^B u'(s) 1_x(s) ds \\
&= u(A) + [u'(s) \min(s, x)]_A^B - \int_A^B u''(s) \min(s, x) ds \\
&= u(A) - Au'(A) + xu'(B) + \int_A^B - u''(s) \min(s, x) ds
\end{aligned}$$

Si $\widetilde{x}$ est une variable aléatoire de fonction densité f ($\int f(x)dx = 1$).

$$\begin{aligned}
E(u(\widetilde{x})) &= \int_A^B \left[u(A) - Au'(A) + xu'(B) + \int_A^B - u''(s) \min(s, x) ds \right] f(x) dx \\
&= u(A) - Au'(A) + E(\widetilde{x}) u'(B) + \int_A^B - u''(s) \left[\int_A^B \min(s, x) f(x) dx \right] ds
\end{aligned}$$

Prenons deux variables aléatoires $\widetilde{x}$ (de densité f) et $\widetilde{y}$ (de densité g). Dire que pour toute fonction u concave croissante (c'est à dire pour toute fonction u'' négative, de primitive positive), $E(u(y))$ $E(u(\widetilde{x})) \leq E(u(y))$ est équivalent à :

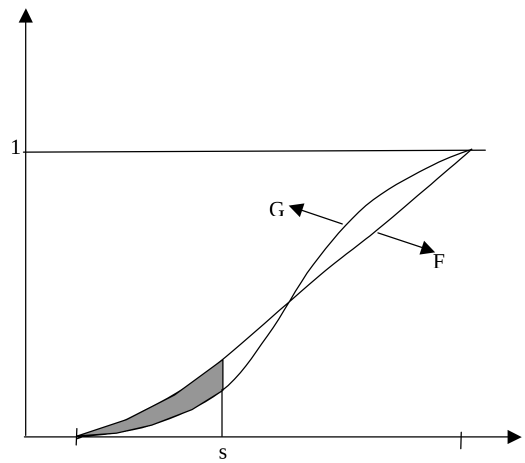
$$\begin{aligned}
E(\widetilde{x}) &\leq E(\widetilde{y}) \\
& \quad et \\
\forall s \int_A^B \min(s, x) f(x) dx &\leq \int_A^B \min(s, x) g(x) dx
\end{aligned}$$

C'est à dire (en intégrant par partie)

$$\begin{aligned}
E(\widetilde{x}) &\leq E(\widetilde{y}) \\
& \quad et \\
\forall s \int_A^s F(x) dx &\geq \int_A^s G(x) dx
\end{aligned}$$

où F et G sont les fonctions de répartition de x et y.

Definition 44 *Quand $\widetilde{x}$ est plus risquée que $\widetilde{y}$on dit que $\widetilde{x}$ est un étalement de $\widetilde{y}$ à moyenne constante. Dans ce cas on a :$E(\widetilde{x}) = E(\widetilde{y})$ et $\forall s \int_A^s F(x) dx \geq \int_A^s G(x) dx$*



Fonctions de répartition : x est plus risquée que y si la surface séparant les deux courbes est toujours positive

Choix de portefeuille, MEDAF

(Capital Asset pricing Model)

Le principe de diversification

Dans le chapitre précédent nous avons décrit les principales caractéristiques du comportement "risquophobe". Cette modélisation nous a permis de mieux définir la notion de risque et même d'établir une gradation entre situations risquées. Ainsi, deux loteries ayant la même espérance, la première est plus risquée que la seconde si tout décideur risquophobe préfère la seconde.

L'objet de ce premier paragraphe est de donner un sens rigoureux à l'expression : "il ne faut pas mettre tous ses oeufs dans le même panier", qui est la traduction populaire du principe de diversification.

L'idée du principe de diversification est somme toute assez simple et repose sur un constat limpide : (sauf si elles sont parfaitement corrélées) la demi somme de deux variables aléatoires identiquement distribuées est moins risquée que chacune d'entre elles. Si on imagine deux paniers ayant chacun la même probabilité p de tomber (et donc de provoquer la perte des oeufs), mettre un oeuf dans chaque panier est moins risqué que les mettre tous les deux dans l'un.

En effet dans le premier cas on aura 0 oeufs avec probabilité p^2, 2 oeufs avec probabilité $(1-p)^2$, et 1 oeuf avec probabilité $2p(1-p)$. Dans le second 0 avec probabilité p et 2 avec probabilité $1-p$. Les probabilités des extrêmes, 0 et 2, ont diminué : de p à p^2 (soit une baisse de $p(1-p)$) et de $(1-p)$ à $(1-p)^2$ (même baisse!), alors que l'événement "modéré" 1, a vu sa probabilité augmenter d'exactement $2p(1-p)$.

Si $\widetilde{X}$ est la variable aléatoire donnant 1 si le premier panier reste intact et 0 s'il tombe, $\widetilde{Y}$ définie de la même manière pour le deuxième panier, on a $2\widetilde{X}$ et $2\widetilde{Y}$ sont plus risquées que $\widetilde{X}+\widetilde{Y}$.

Dans le cas de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées on peut énoncer le résultat général suivant :

Proposition 45 *si $\widetilde{x}_i$ sont n variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, alors $\forall \alpha_i$, n nombres réels positifs de somme 1 ($\sum \alpha_i = 1$), $\frac{\sum \widetilde{x}_i}{n}$ est moins risquée que $\sum \alpha_i \widetilde{x}_i$. (et donc en particulier que chacune des $\widetilde{x}_i$)*

Evidemment la situation est légèrement plus complexe lorsque les variables aléatoires sont corrélées. Considérons d'abord deux variables aléatoires $\widetilde{x}_1$ et $\widetilde{x}_2$ de même variance σ^2 mais non nécessairement indépendantes. Une étude de la variance permet de se faire une idée du risque d'une combinaison convexe des deux variables.

Considérons $t(\alpha)$:

$$t(\alpha) = \frac{\operatorname{var}(\alpha\widetilde{x}_1 + (1-\alpha)\widetilde{x}_2)}{\sigma^2}$$

$$= \alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)\frac{\operatorname{cov}(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2)}{\sigma^2}$$

$t(\alpha)$ est inférieur à 1, car $\operatorname{cov}(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2) < \sigma^2$. Il est minimum pour $\alpha = 1/2$.

Si maintenant, $\widetilde{x}_1$ et $\widetilde{x}_2$ n'ont pas la même variance, avec par exemple $\operatorname{var}(\widetilde{x}_1) \leq \operatorname{var}(\widetilde{x}_2)$. On peut calculer :

$$\Sigma^2(\alpha) = \operatorname{var}(\alpha\widetilde{x}_1 + (1-\alpha)\widetilde{x}_2)$$

$$= \alpha^2\operatorname{var}(\widetilde{x}_1) + (1-\alpha)^2\operatorname{var}(\widetilde{x}_2) + 2\alpha(1-\alpha)\operatorname{cov}(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2)$$

La dérivée de cette fonction vaut :

$\frac{d\Sigma^2}{d\alpha} = 2\alpha(\operatorname{var}(\widetilde{x}_1) - cov(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2)) - 2(1-\alpha)(\operatorname{var}(\widetilde{x}_2) - \operatorname{cov}(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2))$

Il existe un minimum entre 0 et 1 si $\frac{d\Sigma^2}{d\alpha}(0) \leq 0 \leq \frac{d\Sigma^2}{d\alpha}(1)$, c'est à dire si

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(\widetilde{x}_2) - \operatorname{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) &\geq 0 \\ \operatorname{var}(\widetilde{x}_1) - \operatorname{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

C'est à dire si

$$\operatorname{var}(\widetilde{x}_1) - \operatorname{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) \geq 0$$

Que l'on écrit :

$$\frac{\operatorname{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)}{\operatorname{var}(\widetilde{x}_1)} \leq 1$$

$\frac{\operatorname{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)}{\operatorname{var}(\widetilde{x}_1)}$ est appelé coefficient $\beta(\widetilde{x}_2/\widetilde{x}_1)$ de 2 par rapport à 1 : même si la variance de 2 est plus grande que celle de 1, une substitution de 2 à 1 permet de diminuer le risque de 1 si $\beta(\widetilde{x}_2/\widetilde{x}_1) \leq 1$. En terme de corrélation, si $\tau = \frac{\operatorname{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)}{\sqrt{\operatorname{var}(\widetilde{x}_1)\operatorname{var}(\widetilde{x}_2)}}$ est le coefficient de corrélation, cela veut dire que $\tau\sqrt{var\,(\widetilde{x}_2)} \leq \sqrt{var\,(\widetilde{x}_1)}$ (Ceci est toujours vrai si $\tau \leq 0$). Dans ce cas une combinaison des deux actifs permet de diminuer le risque.

En revanche si tel n'est pas le cas il faut combiner les deux variables avec un coefficient négatif, c'est à dire vendre l'un des deux actifs à découvert.

Choix de portefeuille

Dans ce paragraphe on se propose d'analyser le problème de choix de portefeuille d'une manière générale. Un investisseur a 1 euro à "placer", comment doit-il les répartir entre les différents actifs disponibles? Evidemment la réponse dépend de son attitude au risque. Nous allons supposer ici que notre investisseur utilise le critère "moyenne-variance", c'est à dire qu'il évalue $E(\widetilde{v}) - \frac{1}{2}\theta\operatorname{var}(\widetilde{v})$ pour comparer les variables aléatoires.

On considère K actifs financiers, $k = 1, ..., K$. Le revenu de l'actif k est une variable aléatoire réelle $\widetilde{a}_k$: c'est le revenu (cash) aléatoire que procure cet actif dans le futur. Cette variable aléatoire est supposée connue grâce à des étude statistiques. On note p_k le prix, sur le marché, de l'actif k. Il est assez commode de définir le rendement de l'actif k comme la variable aléatoire qui mesure le revenu pour un euro investi : $\widetilde{R}_k = \frac{\widetilde{a}_k}{p_k}$. Il existe par ailleurs un actif sans risque, l'actif 0, qui rapporte R_0 (non aléatoire) euros par euro investi. Un portefeuille risqué est un vecteur z dont chaque composante z_k mesure la quantité d'actif k détenue.

Un portefeuille z procure donc un revenu aléatoire $\widetilde{v} = \sum \widetilde{a}_k\, z_k$ et coûte ${}^t zp$.

On peut écrire le revenu en fonction des rendements :

$$\widetilde{v} = \sum \frac{\widetilde{a}_k}{p_k} p_k z_k = \sum \widetilde{R}_k x_k = {}^t x\widetilde{R}$$

Où $x_k = p_k z_k$ est la dépense affectée à l'achat de l'actif k.

Supposons que notre investisseur ait un euro à répartir entre les différents actifs. Il doit donc choisir de répartir cet euro entre l'actif sans risque (x_0) et les actifs risqués $x = (x_1, ...x_K)$ avec[1] $x_0 + {}^t x\mathbf{1} = 1$. Cette stratégie lui rapporte pour cet euro, un revenu égal à $x_0 R_0 + {}^t x\widetilde{R}. = R_0 + {}^t x(\widetilde{R} - R_0\mathbf{1})$.

On pose $\widetilde{\rho} = \widetilde{R} - R_0\mathbf{1}$, le vecteur des rendements excédentaires par rapport à l'actif sans risque. Le revenu de l'euro investi est donc égal à $\widetilde{v} = R_0 + {}^t x\widetilde{\rho}$.

Le problème qui se pose pour cet investisseur est de choisir x de manière la plus rationnelle possible compte tenu de son attitude face au risque.

On peut étudier la stratégie (x_0, x) en fonction de son espérance (que rapporte-t-elle en moyenne) et de sa variance (quel risque comporte-t-elle).

On a :

$$\begin{cases} E(\widetilde{v}) = R_0 + {}^t xE(\widetilde{\rho}) \\ \operatorname{var}(\widetilde{v}) = E\left[(\widetilde{v} - E(\widetilde{v}))^2\right] \end{cases}$$

[1] $\mathbf{1}$ est le vecteur formés de K composantes toutes égales à 1

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{var}(\widetilde{v}) = E\left[({}^t x\widetilde{R} - {}^t xE(\widetilde{R}))^2\right] \\ = E\left[{}^t x(\widetilde{R} - E(\widetilde{R}))^t(\widetilde{R} - E(\widetilde{R}))x\right] \\ = {}^t xE\left[(\widetilde{R} - E(\widetilde{R}))^t(\widetilde{R} - E(\widetilde{R}))\right]x \end{array}\right.$$

Posons

$$\Omega = E\left[(\widetilde{R} - E(\widetilde{R}))^t(\widetilde{R} - E(\widetilde{R}))\right]$$

Ω s'appelle la matrice (symétrique) de variance covariance des actifs son élément ij est égal à $\sigma_{ij} = E\left[(\widetilde{R}_i - E(\widetilde{R}_i))(\widetilde{R}_j - E(\widetilde{R}_j))\right]$. σ_{ij} est la covariance entre les actifs i *et* j. *La* formule ci dessus montre que cettre matrice symétrique est positive (la forme quadratique associée est positive : ${}^t x\Omega x$ est une variance, c'est-à-dire une moyenne de carrés).

Proposition 46 *En résumé, la stratégie* (x_0, x) *rapporte* $R_0 + {}^t xE(\widetilde{\rho})$ *en moyenne avec une variance égale à* ${}^t x\Omega x$.

Notation 47 *Dans la suite si* $\widetilde{v}$ *est une variable aléatoire, on note* v *son espérance. Ici* $\rho_i = E(\widetilde{\rho}_i)$, $R_i = E(\widetilde{R}_i)$.

Comment choisir entre toutes les stratégies possibles? Clairement de deux stratégies donnant la même espérance, n'importe quel investisseur risquophobe préfère la stratégie de variance minimale. Fixons donc à notre investisseur un rendement espéré m et cherchons les vecteurs x de $\mathbb{R}^K$ qui minimisent la variance parmi les x donnant donnant m comme rendement espéré. Considérons le problème d'optimisation (P) :

$$(P)\left\{\begin{array}{c} \min\limits_x({}^t x\Omega x) \\ {}^t x\rho = m - R_0 \end{array}\right.$$

Définissons le nouveau produit scalaire :

Definition 48 $< x, y >= {}^t x\Omega y$ *est un produit scalaire (forme quadratique définie positive) notons* $\| x \|$, *la norme associée.*

Le problème devient :

$$(P)\left\{\begin{array}{c} \min\limits_x \| x \| \\ < \Omega^{-1}\rho, x >= m - R_0 \end{array}\right.$$

Cela consiste à trouver le point d'un hyperplan affine ($< \Omega^{-1}\rho, x >= m - R_0$), qui est à la distance minimale de l'origine. Ce point est évidemment la projection orthogonale x^* de 0 sur cet hyperplan. *Il* est donc défini par les deux équations suivantes, d'inconnues x^* et λ :

$$\left\{\begin{array}{c} x^* = \lambda\Omega^{-1}\rho \\ < \Omega^{-1}\rho, x^* >= m - R_0 \end{array}\right.$$

La première exprime que x^* est colinéaire au vecteur normal à l'hyperplan $\Omega^{-1}\rho$, La seconde exprime que le point de projection appartient à cet hyperplan affine.

- Une remarque importante mérite d'être faite : x^* est un vecteur qui est proportionnel au vecteur $\Omega^{-1}\rho$ qui ne dépend pas de m. Autrement dit, quel que soit le rendement espéré demandé, la structure du portefeuille risqué est identique. Par structure on entend la proportion relative des différents actifs risqués.
- Bien sûr on peut facilement résoudre le système précédent :

$$x^* = \frac{(m - R_0)}{{}^t\rho\Omega^{-1}\rho}\Omega^{-1}\rho$$

- Comment notre investisseur choisit-il le niveau m? Evidemment ceci résulte de son arbitrage entre moyenne et variance, il s'agit de maximiser en m :

$$E(\widetilde{v}) - \frac{1}{2}\theta var(\widetilde{v}) = m - \frac{1}{2}\theta(m - R_0)^2 \frac{1}{{}^t\rho\Omega^{-1}\rho}$$

Definition 49 *On appelle portefeuille de marché le portefeuille $x^m = \frac{\Omega^{-1}\rho}{{}^t\mathbf{1}\Omega^{-1}\rho} = \mu\Omega^{-1}\rho$, portefeuille qui ne comporte que des actifs risqués dans les proportions relatives définies par les solutions des problèmes (P).*

Le rendement de ce portefeuille est noté : $\widetilde{R}_m = R_0 + {}^t x^m \widetilde{\rho}$,

La variance de son rendement est :

$$var(\widetilde{R}_m) = {}^t x^m \Omega x^m$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}(\Omega x^m)_i &= \sum_j \sigma_{ij} x_j^m \\ &= cov(\widetilde{R}_i, \sum \widetilde{R}_j x_j^m) \\ &= cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_m)\end{aligned}$$

Ce portefeuille s'appelle portefeuille de marché parce que, sous l'hypothèse d'investisseurs "moyenne-variance", ce qui précède montre que tous les individus demandent un portefeuille dont la composante risquée est proportionnelle à ce portefeuille. Il en résulte, que la somme de tous les portefeuilles détenus a la même structure (dans sa partie risquée). Bien sûr, un individu très risquophobe demandera peu de ce portefeuille risqué et concentrera son investissement sur l'actif sans risque. Au contraire, un individu moins risquophobe choisira un x_0 plus petit. Tout se passe comme si chaque investisseur achetait un morceau de la capitalisation boursière totale, morceau plus ou moins grand selon l'aversion!

Formule du MEDAF

Ce qui précède permet de trouver une des formules les plus célèbres de la finance!

On a :

$$\begin{aligned}\Omega x^m &= \mu\rho \\ var(\widetilde{R}_m) &= {}^t x^m \Omega x^m = \mu {}^t x^m \rho = \mu(R_m - R_0)\end{aligned}$$

Ceci implique :

$$\frac{\Omega x^m}{var(\widetilde{R}_m)}(R_m - R_0) = \rho$$

Ce qui s'écrit, composante par composante :

$$\frac{cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_m)}{var(\widetilde{R}_m)}(R_m - R_0) = (R_i - R_0)$$

Proposition 50 *Pour n'importe quel actif i, sa surperformance moyenne par rapport à l'actif sans risque $R_i - R_0$ est proportionnelle à la surperformance du portefeuille de marché $R_m - R_0$. Le coefficient de proportionalité est le β de i par rapport au portefeuille de marché.*

$$\begin{aligned}R_i - R_0 &= \beta_i(R_m - R_0) \\ \beta_i &= \frac{cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_m)}{var(\widetilde{R}_m)}\end{aligned}$$

Quelques éléments de "corporate finance"

(Financement de l'entreprise)

Les différentes parties prenantes

Le financement et le contrôle d'une entreprise est, sauf cas exceptinnel, l'affaire de plusieurs parties prenantes (stakeholders). Les actionnaires y ont apporté du capital (stock holders), et à ce titre sont les "propriétaires" de l'entreprise. Les prêteurs (debt holders), ont des créances sur l'entreprise qui leur emprunte des fonds. Les dirigeants de l'entreprise, choisis par les actionnaires, prennent les décisions au nom de ceux-ci, décisions qui, évidemment, ont une incidence sur la vie de l'entreprise.

Très schématiquement, pour assurer la production, l'entreprise a besoin de financement. Pour simplifier on peut imaginer que ce financement est simplement égal au besoin de fonds de roulement qui représente l'avance permanente de dépenses que l'entreprise doit faire avant de réaliser des recettes. Capital et endettement sont les deux principales sources de financement.

La rémunération de ces "créances" (claims) se fait grace au bénéfice (excédent d'exploitatoion) réalisé par l'entreprise. Les différentes formes de financement (capital, dette, dette convertible, action prioritaire....) sont simplement des contrats qui spécifient les droits des détenteurs (claim holders) sur ce revenu généré par l'entreprise. La structure de financement d'une entreprise doit s'interpréter comme la façon qui a été choisie de partager le gâteau entre les "convives". Le problème principal qui se pose est alors le suivant : la structure de financement a-t-elle une incidence sur l'activité de l'entreprise? La façon de partager le gateau a-t-elle une influence sur sa taille? C'est le principal problème examiné par la "corporate finance". Nous verrons ici quelques intuitions sur ce problème.

A ce de financement s'ajoute celui de séparation plus ou moins grande entre financement et contrôle. Les actionnaires délèguent la gestion à des manageurs qui n'ont pas nécessairement des intérêts en ligne avec ceux des propriétaires. Dans un monde où l'information serait parfaite, c'est à dire dans lequel l'actionnaire pourrait observer parfaitement le comportement des dirigeants et ainsi lui imposer sa ligne, le problème de délégation ne se pose pas. En revanche, dè lors que l'information est asymétrique, il faut prévoir des instruments incitatifs dont l'objectif est d'aligner les intérêts des actionnaires et des dirigeants.

Les deux formes basiques de financement

Dans ce paragraphe nous donnons une vision statique sur une période, évidemment caricaturale de l'entreprise. Imaginons une entreprise dont le revenu (excédent d'expolitation) est aléatoire donné égal à $\widetilde{R}$.

L'ensemble des parties prenantes (claim hoders) doivent se répartir $\widetilde{R}$.

Dette

Par définition de la "dette simple", les prêteurs ont un droit prioritaire sur R : si D est le montant de la dette (ce que doit l'entreprise), la rémunération des prêteurs s'établit à :

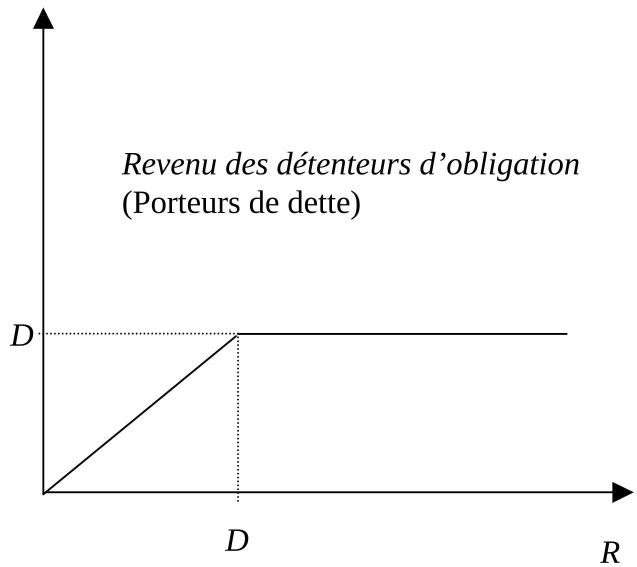
$$\widetilde{a}_d = \min(\widetilde{R}, D)$$

La dette, dans ce cas devient un actif financier incertain du fait du risque de défaut ($R < D$) de l'entreprise. La signature d'une obligation (bond) est justement associée à la probabilité de défaut. Une bonne signature signifie que la probabilité de défaut est faible. Il existe des agences de notation (Moody's, Standard & Poors) dont l'activité est de noter (AAA,AA,A,BBB,......) les entreprises en fonction de leur capacité de remboursement de leur dette. Les "Junk bonds" sont les titres (dette émises) par les entreprises dont la signature n'est pas bonne.

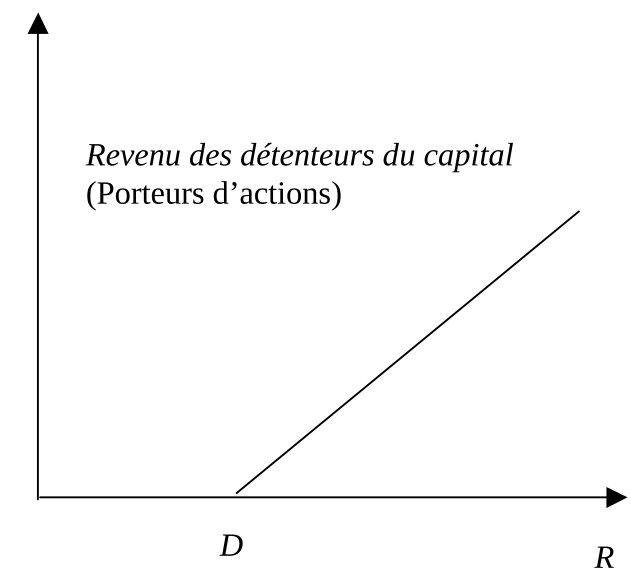
Actions/capital

Les détenteurs du capital sont alors "créanciers résiduels" (residual claimants) : leur revenu est ce qui reste après avoir servi la dette :

$$\widetilde{a}_c = (\widetilde{R} - D)^+$$



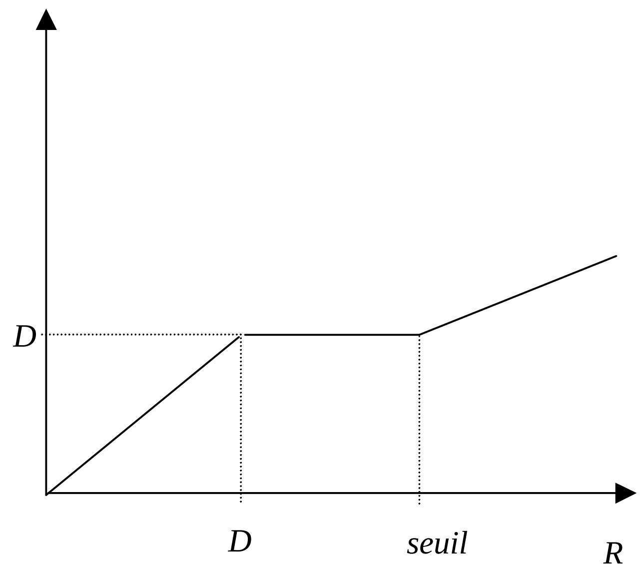
Revenu des porteurs en fonction de l'excédent de l'entreprise



Autres créances

On peut concevoir tout un ensemble de créance intermédiaires entre la dette et l'action. Par exemple il existe des degrés de priorité dans les dettes. Les dettes prioritaires seront servies en premier puis les dettes secondaires, puis enfin les actionnaires.

Les oblgations convertibles en action (selon un taux fixé à l'avance) permettent au détenteur de dette de prendre une option en cas de résultats favorables. Le profil de revenu de ce type de créance est alors le suivant.



dette convertible en actions

Valeur totale de l'entreprise

Par définition, la valeur totale de l'entreprise est la somme des valeurs des titres (obligations et actions) qu'elle a émis. Si par exemple on représente l'aléa par un ensemble d'états de la nature E, la valeur des titres peut se calculer par la formule des chapitres précédents ($q(e)$ représente le prix d'un euro dans l'état e), la valeur des obligations est:

$$P_d = \sum_E q(e) \min(R(e), D)$$

La valeur des actions :

$$P_a = \sum_E q(e)(R(e) - D)^+$$

On voit alors immédiatement que :

$$\begin{aligned} P_a + P_d &= \sum_E q(e) \left\{ (R(e) - D)^+ + \min(R(e), D) \right\} \\ &= \sum_E q(e) R(e) \end{aligned}$$

C'est à dire que la valeur de l'entreprise ne dépend pas de D c'est à dire de la structure de financement. Elle est égale à la valeur (de marché) de l'excédent d'exploitation.

Ce résultat théorique connu sous le nom de "théorème de Modigliani-Miller", énonce que dans une économie où l'information est parfaite, la structure de financement est indépendante de la valeur totale de l'entreprise. Ce résultat est évidemment en contradiction avec l'expérience commune, et une grande partie de la finance d'entreprise est consacrée à l'analyse des situations dans lesquelles il ne s'applique pas, c'est à dire de situations dans laquelle, la taille du gâteau est affectée par la méthode de partage!

En effet lorsque l'information est imparfaite, les prêteurs peuvent mal connaître le risque associé à l'entreprise. Ils peuvent aussi avoir des difficultés à contrôler l'efficacité du management, en particulier l'effort que celui ci engage pour rembourser les dettes. Ces deux types d'imperfection de marché sont telles que la structure de financement aura des implications incitatives et le résultat de l'entreprise ne sera pas indépendant de sa structure de financement.

Prise de risque

La forme des revenus touchés par les différentes parties prenantes a une importance en matière de prise de risque. En particulier, le revenu des actionnaires est une fonction convexe du résultat. Il en résulte que les actionnaires sont poussés, entre deux décisions donnant la même espérance (la même valeur totale) à choisir la plus risquée! Il en résulte évidemmment une perte pour les détenteurs d'obligation qui eux ont une fonction concave du résultat!

Pour se protéger de ce genre de "déconvenues", dans un monde où l'information est parfaite, les porteurs de dettes completent le contrat par des "covenant" qui contraignent le management à contenir le risque. La convertibilité des obligations en action est une autre manière de se protéger contre ce phénomène.