Interactions stratégiques dynamiques

D. Henriet

Ecole centrale Marseille, 2014

- Analyse de situations avec interactions stratégiques dynamiques
- Plusieurs acteurs ont des comportements (non coopératifs et stratégiques) qui influencent l'évolution d'un système
- Exemple :
  - pêcheurs prélevant sur une ressource (renouvelable) de poissons.
- La tragédie des communs : le prélèvement est trop important.

- Analyse de situations avec interactions stratégiques dynamiques
- Plusieurs acteurs ont des comportements (non coopératifs et stratégiques) qui influencent l'évolution d'un système
- Exemple :
  - pêcheurs prélevant sur une ressource (renouvelable) de poissons.
- La tragédie des communs : le prélèvement est trop important.

- Analyse de situations avec interactions stratégiques dynamiques
- Plusieurs acteurs ont des comportements (non coopératifs et stratégiques) qui influencent l'évolution d'un système
- Exemple :
  - pêcheurs prélevant sur une ressource (renouvelable) de poissons.
- La tragédie des communs : le prélèvement est trop important.

- Analyse de situations avec interactions stratégiques dynamiques
- Plusieurs acteurs ont des comportements (non coopératifs et stratégiques) qui influencent l'évolution d'un système
- Exemple :
  - pêcheurs prélevant sur une ressource (renouvelable) de poissons.
- La tragédie des communs : le prélèvement est trop important.

- Un système décrit par une variable d'état $x(t)$. Par exemple, le stock de poissons.
- Agents qui, à chaque instant, exécutent chacun une action $v_i(t)$ qui influence le système :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), v_1(t), ..., v_n(t))$$

Les pêcheurs prélèvent sur la ressource...

- Chaque agent retire une "utilité" instantanée :

$$U_i(t, x(t), v_1(t), ..., v_n(t))$$

- et une utilité finale $A(x(T))$

- Un système décrit par une variable d'état $x(t)$. Par exemple, le stock de poissons.
- Agents qui, à chaque instant, exécutent chacun une action $v_i(t)$ qui influence le système :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), v_1(t), \ldots, v_n(t))$$

Les pêcheurs prélèvent sur la ressource...

- Chaque agent retire une "utilité" instantanée :

$$U_i(t, x(t), v_1(t), \ldots, v_n(t))$$

- et une utilité finale $A(x(T))$

- Un système décrit par une variable d'état $x(t)$. Par exemple, le stock de poissons.

- Agents qui, à chaque instant, exécutent chacun une action $v_i(t)$ qui influence le système :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), v_1(t), ..., v_n(t))$$

Les pêcheurs prélèvent sur la ressource...

- Chaque agent retire une "utilité" instantanée :

$$U_i(t, x(t), v_1(t), ..., v_n(t))$$

- et une utilité finale $A(x(T))$

- Si les v_i sont données, l'utilité totale atteinte par l' agent i est :

$$\int_{t_0}^{T} U_i\left(t, x(t), v_1(t), \ldots, v_n(t)\right) dt + A(x(T))$$

avec :

$$\overset{\bullet}{x}(t) = f\left(t, x(t), v_1(t), \ldots v_n(t)\right)$$

$$x(t_0) = x_0$$

- Evidemment, chaque joueur i qui contrôle v_i va vouloir "jouer au mieux" pour lui...
- Quels concepts d'équilibre ? Regardons d'abord pour 1 joueur!

- Si les v_i sont données, l'utilité totale atteinte par l' agent i est :

$$\int_{t_0}^{T} U_i\left(t, x(t), v_1(t), \ldots, v_n(t)\right) dt + A(x(T))$$

avec :

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), v_1(t), \ldots v_n(t)\right)$$

$$x(t_0) = x_0$$

- Evidemment, chaque joueur i qui contrôle v_i va vouloir "jouer au mieux" pour lui...
- Quels concepts d'équilibre ? Regardons d'abord pour 1 joueur!

- Si les v_i sont données, l'utilité totale atteinte par l' agent i est :

$$\int_{t_0}^{T} U_i\left(t, x(t), v_1(t), \ldots, v_n(t)\right) dt + A(x(T))$$

avec :

$$\overset{\bullet}{x}(t) = f\left(t, x(t), v_1(t), \ldots v_n(t)\right)$$

$$x(t_0) = x_0$$

- Evidemment, chaque joueur i qui contrôle v_i va vouloir “jouer au mieux” pour lui...

- Quels concepts d'équilibre ? Regardons d'abord pour 1 joueur!

Rappels à 1 joueur : contrôle optimal

- Supposons que pout tout contrôle admissible v, l'équation $\dot{x}(t) = f(t, x(t), v(t))$, avec $x(t_0) = x_0$ a une solution notée $x_v(t)$
- Posons
$$V(t_0, x_0) = \max_{v(.)} \left\{ \int_{t_0}^{T} U(t, x_v(t), v(t))dt + A(x_v(T)) \right\}$$
- On a :
$$\begin{aligned} V(t_0, x_0) = & \max_{v(.)} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+h} U(t, x_v(t), v(t))dt \right. \\ & \left. + \int_{t_0+h}^{T} U(t, x_v(t), v(t))dt + A(x_v(T)) \right\} \end{aligned}$$
- C'est à dire
$$\begin{aligned} V(t_0, x_0) = & \max_{v(.)} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+h} U(t, x_v(t), v(t))dt \right. \\ & \left. + V(t_0 + h, x_v(t_0 + h)) \right\} \end{aligned}$$

Rappels à 1 joueur : contrôle optimal

- Supposons que pout tout contrôle admissible v, l'équation $\dot{x}(t) = f(t, x(t), v(t))$, avec $x(t_0) = x_0$ a une solution notée $x_v(t)$
- Posons
$$V(t_0, x_0) = \max_{v(.)} \left\{ \int_{t_0}^{T} U(t, x_v(t), v(t))dt + A(x_v(T)) \right\}$$
- On a :
$$V(t_0, x_0) = \max_{v(.)} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+h} U(t, x_v(t), v(t))dt \right.$$
$$\left. + \int_{t_0+h}^{T} U(t, x_v(t), v(t))dt + A(x_v(T)) \right\}$$
- C'est à dire
$$V(t_0, x_0) = \max_{v(.)} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+h} U(t, x_v(t), v(t))dt \right.$$
$$\left. + V(t_0 + h, x_v(t_0 + h)) \right\}$$

Rappels à 1 joueur : contrôle optimal

- Supposons que pout tout contrôle admissible v, l'équation $\dot{x}(t) = f(t, x(t), v(t))$, avec $x(t_0) = x_0$ a une solution notée $x_v(t)$
- Posons
$$V(t_0, x_0) = \max_{v(.)} \left\{ \int_{t_0}^{T} U(t, x_v(t), v(t))dt + A(x_v(T)) \right\}$$
- On a :
$$V(t_0, x_0) = \max_{v(.)} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+h} U(t, x_v(t), v(t))dt \right.$$
$$\left. + \int_{t_0+h}^{T} U(t, x_v(t), v(t))dt + A(x_v(T)) \right\}$$
- C'est à dire
$$V(t_0, x_0) = \max_{v(.)} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+h} U(t, x_v(t), v(t))dt \right.$$
$$\left. + V(t_0 + h, x_v(t_0 + h)) \right\}$$

Rappels à 1 joueur : contrôle optimal

- Supposons que pout tout contrôle admissible v, l'équation $\dot{x}(t) = f(t, x(t), v(t))$, avec $x(t_0) = x_0$ a une solution notée $x_v(t)$
- Posons
$$V(t_0, x_0) = \max_{v(.)} \left\{ \int_{t_0}^{T} U(t, x_v(t), v(t))dt + A(x_v(T)) \right\}$$
- On a :
$$\begin{aligned} V(t_0, x_0) = \quad & \max_{v(.)} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+h} U(t, x_v(t), v(t))dt \right. \\ & \left. + \int_{t_0+h}^{T} U(t, x_v(t), v(t))dt + A(x_v(T)) \right\} \end{aligned}$$
- C'est à dire
$$\begin{aligned} V(t_0, x_0) = \quad & \max_{v(.)} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+h} U(t, x_v(t), v(t))dt \right. \\ & \left. + V(t_0 + h, x_v(t_0 + h)) \right\} \end{aligned}$$

Rappels à 1 joueur : contrôle optimal

- En supposant la fonction valeur (ie l'utilité totale optimale quand on démarre à t avec un système dans l'état x), connue
- Si on controle avec v entre t_0 et $t_0 + h$, on se retrouvera (à $t_0 + h$) avec un système dont l'état sera $x_v(t_0 + h)$.Donc avec une valeur égale à $V(t_0 + h, x_v(t_0 + h))$.
- Le contrôle v a deux effet : un effet immediat $\int_{t_0}^{t_0+h} U(t, x_v(t), v(t))dt$ et un effet futur $V(t_0 + h, x_v(t_0 + h))$
- En divisant par h et en faisant tendre vers 0, on doit avoir pour tout t_0, x_0:

$$0 = \max_v \left\{ U(t_0, x_0, v) + \frac{\partial V}{\partial x}(t_0, x_0) f(t_0, x_0, v) \right\} + \frac{\partial V}{\partial t}(t_0, x_0)$$

- Avec la condition terminale :

$$V(T, x) = A(x)$$

Rappels à 1 joueur : contrôle optimal

- En supposant la fonction valeur (ie l'utilité totale optimale quand on démarre à t avec un système dans l'état x), connue
- Si on controle avec v entre t_0 et t_0+h, on se retrouvera (à t_0+h) avec un système dont l'état sera $x_v(t_0+h)$.Donc avec une valeur égale à $V(t_0+h, x_v(t_0+h))$.
- Le contrôle v a deux effet : un effet immediat $\int_{t_0}^{t_0+h} U(t, x_v(t), v(t))dt$ et un effet futur $V(t_0+h, x_v(t_0+h))$
- En divisant par h et en faisant tendre vers 0, on doit avoir pour tout t_0, x_0:

$$0 = \max_v \left\{ U(t_0, x_0, v) + \frac{\partial V}{\partial x}(t_0, x_0) f(t_0, x_0, v) \right\} + \frac{\partial V}{\partial t}(t_0, x_0)$$

- Avec la condition terminale :

$$V(T, x) = A(x)$$

Rappels à 1 joueur : contrôle optimal

- En supposant la fonction valeur (ie l'utilité totale optimale quand on démarre à t avec un système dans l'état x), connue
- Si on controle avec v entre t_0 et $t_0 + h$, on se retrouvera (à $t_0 + h$) avec un système dont l'état sera $x_v(t_0 + h)$.Donc avec une valeur égale à $V(t_0 + h, x_v(t_0 + h))$.
- Le contrôle v a deux effet : un effet immediat $\int_{t_0}^{t_0+h} U(t, x_v(t), v(t))dt$ et un effet futur $V(t_0 + h, x_v(t_0 + h))$
- En divisant par h et en faisant tendre vers 0, on doit avoir pour tout t_0, x_0:

$$0 = \max_v \left\{ U(t_0, x_0, v) + \frac{\partial V}{\partial x}(t_0, x_0) f(t_0, x_0, v) \right\} + \frac{\partial V}{\partial t}(t_0, x_0)$$

- Avec la condition terminale :

$$V(T, x) = A(x)$$

Rappels à 1 joueur : contrôle optimal

- En supposant la fonction valeur (ie l'utilité totale optimale quand on démarre à t avec un système dans l'état x), connue
- Si on controle avec v entre t_0 et t_0+h, on se retrouvera (à t_0+h) avec un système dont l'état sera $x_v(t_0+h)$.Donc avec une valeur égale à $V(t_0+h, x_v(t_0+h))$.
- Le contrôle v a deux effet : un effet immediat $\int_{t_0}^{t_0+h} U(t, x_v(t), v(t))dt$ et un effet futur $V(t_0+h, x_v(t_0+h))$
- En divisant par h et en faisant tendre vers 0, on doit avoir pour tout t_0, x_0:

$$0 = \max_v \left\{ U(t_0, x_0, v) + \frac{\partial V}{\partial x}(t_0, x_0) f(t_0, x_0, v) \right\} + \frac{\partial V}{\partial t}(t_0, x_0)$$

- Avec la condition terminale :

$$V(T, x) = A(x)$$

Rappels à 1 joueur : autre approche

- On a :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = \max_{v}\left\{U(t,x,v) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x,v)\right\}$$

- En dérivant par rapport à x et en utilisant le th de l'enveloppe, on a au point $(t,x,v^*(t,x))$

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} = \left\{\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} f + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right\}$$

- Sur la trajectoire posons $p(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(t,x(t))$:

$$\dot{p}(t) = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} f$$

- On obtient sur la trajectoire:

$$\dot{p}(t) = -\left\{\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right\}$$

Rappels à 1 joueur : autre approche

- On a :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = \max_v \left\{ U(t,x,v) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x,v) \right\}$$

- En dérivant par rapport à x et en utilisant le th de l'enveloppe, on a au point $(t, x, v^*(t,x))$

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} f + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right\}$$

- Sur la trajectoire posons $p(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t))$:

$$\dot{p}(t) = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} f$$

- On obtient sur la trajectoire:

$$\dot{p}(t) = -\left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right\}$$

Rappels à 1 joueur : autre approche

- On a :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = \max_v \left\{ U(t,x,v) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x,v) \right\}$$

- En dérivant par rapport à x et en utilisant le th de l'enveloppe, on a au point $(t,x,v^*(t,x))$

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} f + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} \right\}$$

- Sur la trajectoire posons $p(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(t,x(t))$:

$$\dot{p}(t) = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} f$$

- On obtient sur la trajectoire:

$$\dot{p}(t) = -\left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} \right\}$$

Rappels à 1 joueur : autre approche

- On a :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = \max_{v}\left\{U(t,x,v) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x)f(t,x,v)\right\}$$

- En dérivant par rapport à x et en utilisant le th de l'enveloppe, on a au point $(t,x,v^*(t,x))$

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} = \left\{\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}f + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right\}$$

- Sur la trajectoire posons $p(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(t,x(t))$:

$$\dot{p}(t) = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}f$$

- On obtient sur la trajectoire:

$$\dot{p}(t) = -\left\{\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right\}$$

Rappels à 1 joueur : autre approche

- Définissons le Hamiltonien

$$(t,x,p,v) \to H(t,x,p,v) \equiv U(t,x,v) + pf(t,x,v)$$

- soit alors :

$$H^*(t,x,p) = \max_v H(t,x,p,v)$$

- On a

$$\frac{\partial H^*}{\partial x}(t,x,p) = \frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial x}$$

- et donc :

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x}(t,x(t),p(t))$$

Rappels à 1 joueur : autre approche

- Définissons le Hamiltonien

$$(t,x,p,v) \rightarrow H(t,x,p,v) \equiv U(t,x,v) + pf(t,x,v)$$

- soit alors :

$$H^*(t,x,p) = \max_v H(t,x,p,v)$$

- On a

$$\frac{\partial H^*}{\partial x}(t,x,p) = \frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial x}$$

- et donc :

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x}(t,x(t),p(t))$$

Rappels à 1 joueur : autre approche

- Définissons le Hamiltonien

$$(t,x,p,v) \to H(t,x,p,v) \equiv U(t,x,v) + pf(t,x,v)$$

- soit alors :

$$H^*(t,x,p) = \max_v H(t,x,p,v)$$

- On a

$$\frac{\partial H^*}{\partial x}(t,x,p) = \frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial x}$$

- et donc :

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x}(t,x(t),p(t))$$

Rappels à 1 joueur : autre approche

- Définissons le Hamiltonien

$$(t,x,p,v) \to H(t,x,p,v) \equiv U(t,x,v) + pf(t,x,v)$$

- soit alors :

$$H^*(t,x,p) = \max_v H(t,x,p,v)$$

- On a

$$\frac{\partial H^*}{\partial x}(t,x,p) = \frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial x}$$

- et donc :

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x}(t,x(t),p(t))$$

Contrôle optimal: cas stationnaire

- Cas où les fonctions ne dépendent pas explicitement du temps et où $T = +\infty$:

$$\int_{t_0}^{+\infty} \exp\left(-\rho\left(t - t_0\right)\right) U_i\left(x(t), v_1(t), ..., v_n(t)\right) dt$$

$$\overset{\bullet}{x}(t) = f\left(x(t), v_1(t), ..., v_n(t)\right)$$

- Alors : en posant $V(t, x) = \exp(-\rho t) J(x)$

$$\rho J(x_0) = \max_v \left\{ U\left(x_0, v\right) + J'(x_0) f\left(x_0, v\right) \right\}$$

Contrôle optimal: cas stationnaire

- Cas où les fonctions ne dépendent pas explicitement du temps et où $T = +\infty$:

$$\int_{t_0}^{+\infty} \exp\left(-\rho\left(t - t_0\right)\right) U_i\left(x(t), v_1(t), \ldots, v_n(t)\right) dt$$

$$\overset{\bullet}{x}(t) = f\left(x(t), v_1(t), \ldots, v_n(t)\right)$$

- Alors : en posant $V(t,x) = \exp(-\rho t) J(x)$

$$\rho J(x_0) = \max_{v} \left\{ U\left(x_0, v\right) + J'(x_0) f\left(x_0, v\right) \right\}$$

Jeu à plusieurs (2) joueurs : 2 concepts

- Chacun des joueurs contrôle une partie de l'évolution du système.
- On peut imaginer d'abord le jeu où les statégies sont les fonctions $v_1(t)$ et $v_2(t)$

Definition

Open loop : les stratégies du jeu sont les contrôles $v_i(t)$: chaque joueur s'engage initialement sur ce qu'il va faire à chaque instant.

- On peut imaginer que les stratégies sont des fonctions $v_i(t,x)$(feed back)

Definition

Closed loop (ou feed back): les stratégies du jeu sont définies à chaque instant pour chaque état. $v_i(t,x)$.

Dans chacun des cas : équilibre de Nash et équilibre de Nash Parfait...Rappels

Jeu à plusieurs (2) joueurs : 2 concepts

- Chacun des joueurs contrôle une partie de l'évolution du système.
- On peut imaginer d'abord le jeu où les statégies sont les fonctions $v_1(t)$ et $v_2(t)$

Definition

Open loop : les stratégies du jeu sont les contrôles $v_i(t)$: chaque joueur s'engage initialement sur ce qu'il va faire à chaque instant.

- On peut imaginer que les stratégies sont des fonctions $v_i(t,x)$(feed back)

Definition

Closed loop (ou feed back): les stratégies du jeu sont définies à chaque instant pour chaque état. $v_i(t,x)$.

Dans chacun des cas : équilibre de Nash et équilibre de Nash Parfait...Rappels

Jeu à plusieurs (2) joueurs : 2 concepts

- Chacun des joueurs contrôle une partie de l'évolution du système.
- On peut imaginer d'abord le jeu où les statégies sont les fonctions $v_1(t)$ et $v_2(t)$

Definition

Open loop : les stratégies du jeu sont les contrôles $v_i(t)$: chaque joueur s'engage initialement sur ce qu'il va faire à chaque instant.

- On peut imaginer que les stratégies sont des fonctions $v_i(t,x)$(feed back)

Definition

Closed loop (ou feed back): les stratégies du jeu sont définies à chaque instant pour chaque état. $v_i(t,x)$.

Dans chacun des cas : équilibre de Nash et équilibre de Nash Parfait...Rappels

Jeu à plusieurs (2) joueurs : 2 concepts

- Chacun des joueurs contrôle une partie de l'évolution du système.
- On peut imaginer d'abord le jeu où les statégies sont les fonctions $v_1(t)$ et $v_2(t)$

Definition

Open loop : les stratégies du jeu sont les contrôles $v_i(t)$: chaque joueur s'engage initialement sur ce qu'il va faire à chaque instant.

- On peut imaginer que les stratégies sont des fonctions $v_i(t,x)$(feed back)

Definition

Closed loop (ou feed back): les stratégies du jeu sont définies à chaque instant pour chaque état. $v_i(t,x)$.

Dans chacun des cas : équilibre de Nash et équilibre de Nash Parfait...Rappels

Jeu à plusieurs (2) joueurs : 2 concepts

- Chacun des joueurs contrôle une partie de l'évolution du système.
- On peut imaginer d'abord le jeu où les statégies sont les fonctions $v_1(t)$ et $v_2(t)$

Definition

Open loop : les stratégies du jeu sont les contrôles $v_i(t)$: chaque joueur s'engage initialement sur ce qu'il va faire à chaque instant.

- On peut imaginer que les stratégies sont des fonctions $v_i(t, x)$(feed back)

Definition

Closed loop (ou feed back): les stratégies du jeu sont définies à chaque instant pour chaque état. $v_i(t, x)$.

Dans chacun des cas : équilibre de Nash et équilibre de Nash Parfait...Rappels

Exemple

- Pêche : stock de poissons x, prélèvement h

$$\overset{\bullet}{x} = x(t)(1 - \ln(x(t))) - h(t)$$

- Utilité individuelle :

$$\int_t^\infty U(h(s)) \exp - rsds = \int_t^\infty \ln(h(s)) \exp - rsds$$

Question 1 : n pêcheurs qui se coordonnent. Soit $V(x)$ la valeur pour 1

- HJB :

$$rV(x) = \max_h \left[\ln(h) + V'(x)(x(1 - \ln(x)) - nh)\right]$$

- Maximisons :

$$\frac{1}{h} = nV'(x) \Longleftrightarrow h = \frac{1}{nV'(x)}$$

Exemple

- D'où
$$rV = -\ln\left(nV'(x)\right) + V'(x(1-\ln(x))) - 1$$
- Changement de variable $y = \ln(x)$, $W(y) = V(x)$:
$$xV'(x) = W'(y)$$
- Equa diff
$$rW = -\ln\left(nW'(y)\exp(-y)\right) + W'(1-y) - 1$$
- Solution de la forme $W(y) = \alpha y + \beta$
$$r(\alpha y + \beta) = -\ln(n) - \ln(\alpha) + y + \alpha(1-y) - 1$$
- D'où
$$\alpha = \frac{1}{1+r} \qquad r\beta = -\ln(n) - \ln(\alpha) + \alpha - 1$$
$$V'(x) = \frac{\alpha}{x} \qquad h = \frac{x}{\alpha n} = \frac{(1+r)x}{n}$$

Exemple

Closed loop : On fait l'hypothèse que la stratégie optimale est linéaire par rapport à $x = dx$

- HJB :

$$rV(x) = \max_h \left[\ln(h) + V'(x)(x(1-\ln(x)) - h - (n-1)dx)\right]$$

- Maximisons :

$$\frac{1}{h} = V'(x) \Longleftrightarrow h = \frac{1}{V'(x)}$$

- D'où

$$rV = -\ln\left(V'(x)\right) + V'(x(1-\ln(x) - (n-1)d)) - 1$$

- Changement de variable $y = \ln(x)$, $W(y) = V(x)$:

$$xV'(x) = W'(y)$$

- Equa diff

$$rW = -\ln\left(W'(y)\exp(-y)\right) + W'(1-(n-1)d-y) - 1$$

Exemple

- Solution de la forme $W(y) = \alpha y + \beta$

$$r(\alpha y + \beta) = -\ln(\alpha) + y + \alpha(1 - y - (n-1)d) - 1$$

- D'où

$$\alpha = \frac{1}{1+r} \qquad r\beta = -\ln(\alpha) - \alpha(n-1)d - 1$$

$$V'(x) = \frac{\alpha}{x} \qquad h = \frac{x}{\alpha} = (1+r)x$$

Exemple en temps discret

- 2 pays CAP et small , 2 périodes, production polluante (EGS)

période	1	2	
prod. "CAP"	X	Y	
prod. "small"	x	y	
pollution	S_1	$S_2 = S_1 + X + x$	$S_3 = S_2 + Y + y$
Utilité CAP	$aX - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}S_1^2$	$aY - \frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}S_2^2$	$-\frac{1}{2}S_3^2$
Utilité small	$ax - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}S_1^2$	$ay - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}S_2^2$	$-\frac{1}{2}S_3^2$

$$V^s(x, X, y, Y) = U_1^s(x, X) + U_2^s(x, X, y, Y)$$

$$V^c(x, X, y, Y) = U_1^c(x, X) + U_2^c(x, X, y, Y)$$

Exemple en temps discret

- 2 pays CAP et small , 2 périodes, production polluante (EGS)

période	1	2	
prod. "CAP"	X	Y	
prod. "small"	x	y	
pollution	S_1	$S_2 = S_1 + X + x$	$S_3 = S_2 + Y + y$
Utilité CAP	$aX - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}S_1^2$	$aY - \frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}S_2^2$	$-\frac{1}{2}S_3^2$
Utilité small	$ax - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}S_1^2$	$ay - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}S_2^2$	$-\frac{1}{2}S_3^2$

$$V^s(x, X, y, Y) = U_1^s(x, X) + U_2^s(x, X, y, Y)$$

$$V^c(x, X, y, Y) = U_1^c(x, X) + U_2^c(x, X, y, Y)$$

Exemple en temps discret : open loop

- Equilibre de Nash sur les trajectoires :

$$V^s\left(\widehat{x},\widehat{X},\widehat{y},\widehat{Y}\right) \geq V^s\left(x,\widehat{X},y,\widehat{Y}\right)$$

$$V^c\left(\widehat{x},\widehat{X},\widehat{y},\widehat{Y}\right) \geq V^c\left(\widehat{x},X,\widehat{y},Y\right)$$

$$\frac{\partial V^s}{\partial x}\left(\widehat{x},\widehat{X},\widehat{y},\widehat{Y}\right) = \frac{\partial U_1^s}{\partial x}\left(\widehat{x},\widehat{X}\right) + \frac{\partial U_2^s}{\partial x}\left(\widehat{x},\widehat{X},\widehat{y},\widehat{Y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial V^s}{\partial y}\left(\widehat{x},\widehat{X},\widehat{y},\widehat{Y}\right) = \frac{\partial U_2^s}{\partial y}\left(\widehat{x},\widehat{X},\widehat{y},\widehat{Y}\right) = 0$$

Exemple en temps discret : open loop

- Equilibre de Nash sur les trajectoires :

$$V^s\left(\widehat{x},\widehat{X},\widehat{y},\widehat{Y}\right) \geq V^s\left(x,\widehat{X},y,\widehat{Y}\right)$$

$$V^c\left(\widehat{x},\widehat{X},\widehat{y},\widehat{Y}\right) \geq V^c\left(\widehat{x},X,\widehat{y},Y\right)$$

$$\frac{\partial V^s}{\partial x}\left(\widehat{x},\widehat{X},\widehat{y},\widehat{Y}\right) = \frac{\partial U_1^s}{\partial x}\left(\widehat{x},\widehat{X}\right) + \frac{\partial U_2^s}{\partial x}\left(\widehat{x},\widehat{X},\widehat{y},\widehat{Y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial V^s}{\partial y}\left(\widehat{x},\widehat{X},\widehat{y},\widehat{Y}\right) = \frac{\partial U_2^s}{\partial y}\left(\widehat{x},\widehat{X},\widehat{y},\widehat{Y}\right) = 0$$

Exemple en temps discret : closed loop

- On se place en début de période 2, x et X sont fixés.

Equilibre de Nash en période 2 :$\widetilde{y}(x,X)$, $\widetilde{Y}(x,X)$:

$$\frac{\partial U_2^s}{\partial y}\left(x,X,\widetilde{y}(x,X),\widetilde{Y}(x,X)\right)=0$$

$$\frac{\partial U_2^C}{\partial Y}\left(x,X,\widetilde{y}(x,X),\widetilde{Y}(x,X)\right)=0$$

On raisonne ensuite par "induction arrière" pour tout état du système :

- Utilités atteintes en période 1 ($i=s$ ou C):

$$U_1^i(x,X)+U_2^i(x,X,\widetilde{y}(x,X),\widetilde{Y}(x,X))$$

Exemple en temps discret : closed loop

- On se place en début de période 2, x et X sont fixés.

Equilibre de Nash en période 2 :$\widetilde{y}(x,X)$, $\widetilde{Y}(x,X)$:

$$\frac{\partial U_2^s}{\partial y}\left(x, X, \widetilde{y}(x,X), \widetilde{Y}(x,X)\right) = 0$$

$$\frac{\partial U_2^C}{\partial Y}\left(x, X, \widetilde{y}(x,X), \widetilde{Y}(x,X)\right) = 0$$

On raisonne ensuite par "induction arrière" pour tout état du système :

- Utilités atteintes en période 1 ($i = s$ ou C):

$$U_1^i(x,X) + U_2^i(x, X, \widetilde{y}(x,X), \widetilde{Y}(x,X))$$

Exemple en temps discret : closed loop

- Le jeu en période 1 est un “nouveau jeu” où les utilité atteintes intègrent l’effet sur l’avenir...
- A l’équilibre de Nash on aura nécéssairement :

$$\frac{\partial U_1^s}{\partial x}(x^*,X^*)+\frac{\partial U_2^s}{\partial x}\left(x^*,\widetilde{y}(x^*,X^*),\widetilde{Y}(x^*,X^*)\right)$$

$$+\frac{\partial U_2^s}{\partial Y}\left(x^*,\widetilde{y}(x^*,X^*),\widetilde{Y}(x^*,X^*)\right)\frac{\partial \widetilde{Y}}{\partial x}(x^*,X^*)=0$$

qui est différente de

$$\frac{\partial U_1^s}{\partial x}\left(\widehat{x},\widehat{X}\right)+\frac{\partial U_2^s}{\partial x}\left(\widehat{x},\widehat{X},\widehat{y},\widehat{Y}\right)=0$$

Le terme supplémentaire est un effet stratégique : small anticipe que son action en période 1 aura une influence sur Y!

Exemple en temps discret : closed loop

- Le jeu en période 1 est un “nouveau jeu” où les utilité atteintes intègrent l’effet sur l’avenir...
- A l’équilibre de Nash on aura nécéssairement :

$$\frac{\partial U_1^s}{\partial x}(x^*, X^*) + \frac{\partial U_2^s}{\partial x}\left(x^*, \widetilde{y}(x^*, X^*), \widetilde{Y}(x^*, X^*)\right)$$

$$+\frac{\partial U_2^s}{\partial Y}\left(x^*, \widetilde{y}(x^*, X^*), \widetilde{Y}(x^*, X^*)\right)\frac{\partial \widetilde{Y}}{\partial x}(x^*, X^*) = 0$$

qui est différente de

$$\frac{\partial U_1^s}{\partial x}\left(\widehat{x}, \widehat{X}\right) + \frac{\partial U_2^s}{\partial x}\left(\widehat{x}, \widehat{X}, \widehat{y}, \widehat{Y}\right) = 0$$

Le terme supplémentaire est un effet stratégique : small anticipe que son action en période 1 aura une influence sur Y!

Exemple en temps discret : closed loop

- Le jeu en période 1 est un “nouveau jeu” où les utilité atteintes intègrent l'effet sur l'avenir...
- A l'équilibre de Nash on aura nécéssairement :

$$\frac{\partial U_1^s}{\partial x}(x^*, X^*) + \frac{\partial U_2^s}{\partial x}\left(x^*, \widetilde{y}(x^*, X^*), \widetilde{Y}(x^*, X^*)\right)$$

$$+\frac{\partial U_2^s}{\partial Y}\left(x^*, \widetilde{y}(x^*, X^*), \widetilde{Y}(x^*, X^*)\right)\frac{\partial \widetilde{Y}}{\partial x}(x^*, X^*) = 0$$

qui est différente de

$$\frac{\partial U_1^s}{\partial x}\left(\widehat{x}, \widehat{X}\right) + \frac{\partial U_2^s}{\partial x}\left(\widehat{x}, \widehat{X}, \widehat{y}, \widehat{Y}\right) = 0$$

Le terme supplémentaire est un effet stratégique : small anticipe que son action en période 1 aura une influence sur Y!

Summary

- The first main message of your talk in one or two lines.
- The second main message of your talk in one or two lines.
- Perhaps a third message, but not more than that.

- Outlook
  - What we have not done yet.
  - Even more stuff.