Théorie de la décision : Choix Social, Théorie du vote

D. Henriet

Ecole centrale Marseille, 2016

- Qu'est-ce que la théorie du choix social ?
- La formalisation du problème : hypothèses, définitions
- Les Conditions de "rationalité" et le théorème d'Arrow
- Les aspects stratégiques et le théorème de Gibbard-Satterthwaite
- Restriction du "domaine" : unimodalité et autres exemples

- Qu'est-ce que la théorie du choix social ?
- La formalisation du problème : hypothèses, définitions
- Les Conditions de "rationalité" et le théorème d'Arrow
- Les aspects stratégiques et le théorème de Gibbard-Satterthwaite
- Restriction du "domaine" : unimodalité et autres exemples

- Qu'est-ce que la théorie du choix social ?
- La formalisation du problème : hypothèses, définitions
- Les Conditions de "rationalité" et le théorème d'Arrow
- Les aspects stratégiques et le théorème de Gibbard-Satterthwaite
- Restriction du "domaine" : unimodalité et autres exemples

- Qu'est-ce que la théorie du choix social ?
- La formalisation du problème : hypothèses, définitions
- Les Conditions de "rationalité" et le théorème d'Arrow
- Les aspects stratégiques et le théorème de Gibbard-Satterthwaite
- Restriction du "domaine" : unimodalité et autres exemples

- Qu'est-ce que la théorie du choix social ?
- La formalisation du problème : hypothèses, définitions
- Les Conditions de "rationalité" et le théorème d'Arrow
- Les aspects stratégiques et le théorème de Gibbard-Satterthwaite
- Restriction du "domaine" : unimodalité et autres exemples

- Le choix social a pour objet la sélection d'options par un groupe d'individus
- N individus (ou critères) ont chacun un "avis" sur des options possibles X. Comment décider "collectivement" ?
- Exemples :
  - N électeurs devant choisir un élu ou une décision dans un ensemble X
  - N critères devant servir à choisir une option dans X
  - N courses automobiles pour obtenir un classement des pilotes X

- Le choix social a pour objet la sélection d'options par un groupe d'individus
- N individus (ou critères) ont chacun un "avis" sur des options possibles X. Comment décider "collectivement" ?
- Exemples :
  - N électeurs devant choisir un élu ou une décision dans un ensemble X
  - N critères devant servir à choisir une option dans X
  - N courses automobiles pour obtenir un classement des pilotes X

- Le choix social a pour objet la sélection d'options par un groupe d'individus
- N individus (ou critères) ont chacun un "avis" sur des options possibles X. Comment décider "collectivement" ?
- Exemples :
  - N électeurs devant choisir un élu ou une décision dans un ensemble X
  - N critères devant servir à choisir une option dans X
  - N courses automobiles pour obtenir un classement des pilotes X

- Le choix social a pour objet la sélection d'options par un groupe d'individus
- N individus (ou critères) ont chacun un "avis" sur des options possibles X. Comment décider "collectivement" ?
- Exemples :
  - N électeurs devant choisir un élu ou une décision dans un ensemble X
  - N critères devant servir à choisir une option dans X
  - N courses automobiles pour obtenir un classement des pilotes X

- Le choix social a pour objet la sélection d'options par un groupe d'individus
- N individus (ou critères) ont chacun un "avis" sur des options possibles X. Comment décider "collectivement" ?
- Exemples :
  - N électeurs devant choisir un élu ou une décision dans un ensemble X
  - N critères devant servir à choisir une option dans X
  - N courses automobiles pour obtenir un classement des pilotes X

- Le choix social a pour objet la sélection d'options par un groupe d'individus
- N individus (ou critères) ont chacun un "avis" sur des options possibles X. Comment décider "collectivement" ?
- Exemples :
  - N électeurs devant choisir un élu ou une décision dans un ensemble X
  - N critères devant servir à choisir une option dans X
  - N courses automobiles pour obtenir un classement des pilotes X

Hypothèses, définitions

- Soit X un ensemble d'options (des états sociaux, quel que soit le sens qu'on puisse leur donner, des candidats à une élection, des allocations etc...). $\#X$ est le cardinal de cet ensemble. Une "préférence" sur X sera alors une relation binaire.

Définition

Une relation binaire sur X $\succeq$ est un ensemble de couples (x, y) une partie du produit cartésien $X \times X$. On note $x \succeq y$ lorsque le couple "appartient" à la relation. On lira intuitivement 'x est au moins aussi bon que y'.

Définition

La relation de préférence est réflexive : pour tout x : $x \succeq x$!

Définition

Partie stricte : $x \succ y \Longleftrightarrow x \succeq y$,et *non* $[y \succeq x]$
Partie symétrique (indifférence) $x \sim y \Longleftrightarrow x \succeq y$,et $y \succeq x$

Hypothèses, définitions

- Soit X un ensemble d'options (des états sociaux, quel que soit le sens qu'on puisse leur donner, des candidats à une élection, des allocations etc...). $\#X$ est le cardinal de cet ensemble. Une "préférence" sur X sera alors une relation binaire.

Définition

Une relation binaire sur X $\succeq$ est un ensemble de couples (x, y) une partie du produit cartésien $X \times X$. On note $x \succeq y$ lorsque le couple "appartient" à la relation. On lira intuitivement 'x est au moins aussi bon que y'.

Définition

La relation de préférence est réflexive : pour tout x : $x \succeq x$!

Définition

Partie stricte : $x \succ y \iff x \succeq y$,et $non[y \succeq x]$
Partie symétrique (indifférence) $x \sim y \iff x \succeq y$,et $y \succeq x$

Hypothèses, définitions

- Soit X un ensemble d'options (des états sociaux, quel que soit le sens qu'on puisse leur donner, des candidats à une élection, des allocations etc...). $\#X$ est le cardinal de cet ensemble. Une "préférence" sur X sera alors une relation binaire.

Définition

Une relation binaire sur X $\succeq$ est un ensemble de couples (x, y) une partie du produit cartésien $X \times X$. On note $x \succeq y$ lorsque le couple "appartient" à la relation. On lira intuitivement 'x est au moins aussi bon que y'.

Définition

La relation de préférence est réflexive : pour tout x : $x \succeq x$!

Définition

Partie stricte : $x \succ y \iff x \succeq y$,et *non* $[y \succeq x]$
Partie symétrique (indifférence) $x \sim y \iff x \succeq y$,et $y \succeq x$

Hypothèses, définitions

- Soit X un ensemble d'options (des états sociaux, quel que soit le sens qu'on puisse leur donner, des candidats à une élection, des allocations etc...). $\#X$ est le cardinal de cet ensemble. Une "préférence" sur X sera alors une relation binaire.

Définition

Une relation binaire sur X $\succeq$ est un ensemble de couples (x, y) une partie du produit cartésien $X \times X$. On note $x \succeq y$ lorsque le couple "appartient" à la relation. On lira intuitivement 'x est au moins aussi bon que y'.

Définition

La relation de préférence est réflexive : pour tout x : $x \succeq x$!

Définition

Partie stricte : $x \succ y \Longleftrightarrow x \succeq y$,et $non[y \succeq x]$

Partie symétrique (indifférence) $x \sim y \Longleftrightarrow x \succeq y$,et $y \succeq x$

Hypothèses, définitions

- Conditions de rationalité sur les préférences

Définition

$\succeq$ est transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succeq y \; et \; y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$.

Définition

$\succeq$ est quasi-transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succ y \; et \; y \succ z \Rightarrow x \succ z.$, i.e., si $\succ$est transitive.

Définition

$\succ$ est acyclique s'il n'existe pas de partie finie de X, $\{x_1, ..., x_k\}$telle que$x_1 \succ x_2, x_2 \succ x_3 ... etx \succ x_k, x_k \succ x_1$. Si la relation binaire est transitive, elle est aussi quasi transitive et sa composante stricte est acyclique,.

Définition

Un préordre sur X est une relation binaire réflexive et transitive.

Hypothèses, définitions

- Conditions de rationalité sur les préférences

Définition

$\succeq$ est transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succeq y$ *et* $y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$.

Définition

$\succeq$ est quasi-transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succ y$ *et* $y \succ z \Rightarrow x \succ z$. , i.e., si $\succ$est transitive.

Définition

$\succ$ est acyclique s'il n'existe pas de partie finie de X, $\{x_1, ..., x_k\}$telle que$x_1 \succ x_2, x_2 \succ x_3 ... etx \succ x_k, x_k \succ x_1$. Si la relation binaire est transitive, elle est aussi quasi transitive et sa composante stricte est acyclique,.

Définition

Un préordre sur X est une relation binaire réflexive et transitive.

Hypothèses, définitions

- Conditions de rationalité sur les préférences

Définition

$\succeq$ est transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succeq y$ *et* $y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$.

Définition

$\succeq$ est quasi-transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succ y$ *et* $y \succ z \Rightarrow x \succ z$. , i.e., si $\succ$est transitive.

Définition

$\succ$ est acyclique s'il n'existe pas de partie finie de X, $\{x_1, ..., x_k\}$telle que$x_1 \succ x_2, x_2 \succ x_3 ... etx \succ x_k, x_k \succ x_1$. Si la relation binaire est transitive, elle est aussi quasi transitive et sa composante stricte est acyclique,.

Définition

Un préordre sur X est une relation binaire réflexive et transitive.

Hypothèses, définitions

- Conditions de rationalité sur les préférences

Définition

$\succeq$ est transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succeq y$ *et* $y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$.

Définition

$\succeq$ est quasi-transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succ y$ *et* $y \succ z \Rightarrow x \succ z$. , i.e., si $\succ$est transitive.

Définition

$\succ$ est acyclique s'il n'existe pas de partie finie de X, $\{x_1, ..., x_k\}$telle que$x_1 \succ x_2, x_2 \succ x_3 ... etx \succ x_k, x_k \succ x_1$. Si la relation binaire est transitive, elle est aussi quasi transitive et sa composante stricte est acyclique,.

Définition

Un préordre sur X est une relation binaire réflexive et transitive.

Hypothèses, définitions

- Conditions de rationalité sur les préférences

Définition

$\succeq$ est transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succeq y \; et \; y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$.

Définition

$\succeq$ est quasi-transitive si pour tout
$x, y, z \in X$, $x \succ y \; et \; y \succ z \Rightarrow x \succ z$. , i.e., si $\succ$est transitive.

Définition

$\succ$ est acyclique s'il n'existe pas de partie finie de X, $\{x_1, ..., x_k\}$telle que$x_1 \succ x_2, x_2 \succ x_3 ... etx \succ x_k, x_k \succ x_1$. Si la relation binaire est transitive, elle est aussi quasi transitive et sa composante stricte est acyclique,.

Définition

Un préordre sur X est une relation binaire réflexive et transitive.

Hypothèses, définitions

Définition

$\succeq$ est complète si pour tout $x, y \in X$, $x \succeq y$ *ou* $y \succeq x$.

Définition

Un ordre linéaire est un préordre complet et antisymétrique i.e
$x \succeq y$ *et* $y \succeq x \Longrightarrow x = y$.
Un ordre linéaire est un classement sans ex-aequo...

- On notera
  - $\mathscr{B}$ l'ensemble des relation binaires complète sur X,
  - $\mathscr{P}$ l'ensemble des préordres complets sur X,

Hypothèses, définitions

Définition

$\succeq$ est complète si pour tout $x, y \in X$, $x \succeq y$ *ou* $y \succeq x$.

Définition

Un ordre linéaire est un préordre complet et antisymétrique i.e
$x \succeq y$ *et* $y \succeq x \Longrightarrow x = y$.
Un ordre linéaire est un classement sans ex-aequo...

- On notera
  - $\mathscr{B}$ l'ensemble des relation binaires complète sur X,
  - $\mathscr{P}$ l'ensemble des préordres complets sur X,

Hypothèses, définitions

Définition

$\succeq$ est complète si pour tout $x, y \in X$, $x \succeq y$ *ou* $y \succeq x$.

Définition

Un ordre linéaire est un préordre complet et antisymétrique i.e
$x \succeq y$ *et* $y \succeq x \Longrightarrow x = y$.
Un ordre linéaire est un classement sans ex-aequo...

- On notera
  - $\mathscr{B}$ l'ensemble des relation binaires complète sur X,
  - $\mathscr{P}$ l'ensemble des préordres complets sur X,

Hypothèses, définitions

- Les individus ou critères
- On se donne un ensemble N d'individus (en nombre fini n), chacun muni d'une préférence (préordre complet) $\succeq_i$.
- Le problème central du choix social est celui du passage d'une donnée de préférences individuelles—une par individu—à une préférence sociale, notée $\succeq_S$, ou à un choix, un élément de X ou une partie de X

Hypothèses, définitions

- Les individus ou critères
- On se donne un ensemble N d'individus (en nombre fini n), chacun muni d'une préférence (préordre complet) $\succeq_i$.
- Le problème central du choix social est celui du passage d'une donnée de préférences individuelles—une par individu—à une préférence sociale, notée $\succeq_S$, ou à un choix, un élément de X ou une partie de X

Hypothèses, définitions

- Les individus ou critères
- On se donne un ensemble N d'individus (en nombre fini n), chacun muni d'une préférence (préordre complet) $\succeq_i$.
- Le problème central du choix social est celui du passage d'une donnée de préférences individuelles—une par individu—à une préférence sociale, notée $\succeq_S$, ou à un choix, un élément de X ou une partie de X

Hypothèses, définitions

Définition

Une fonction d'agrégation de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans $\mathscr{B}$ qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre une relation binaire $\succeq_S$

Définition

Une fonction d'utilité sociale de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre un préordre complet $\succeq_S$

Définition

Une fonction d'agrégation ou d'utilité est à domaine universel quand elle est définie sur tout $\mathscr{P}$.

Hypothèses, définitions

Définition

Une fonction d'agrégation de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans $\mathscr{B}$ qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre une relation binaire $\succeq_S$

Définition

Une fonction d'utilité sociale de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre un préordre complet $\succeq_S$

Définition

Une fonction d'agrégation ou d'utilité est à domaine universel quand elle est définie sur tout $\mathscr{P}$.

Hypothèses, définitions

Définition

Une fonction d'agrégation de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans $\mathscr{B}$ qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre une relation binaire $\succeq_S$

Définition

Une fonction d'utilité sociale de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre un préordre complet $\succeq_S$

Définition

Une fonction d'agrégation ou d'utilité est à domaine universel quand elle est définie sur tout $\mathscr{P}$.

Exemples

- La majorité simple : $x \succeq_S y \Longleftrightarrow \#\{i, x \succeq_i y\} \geq \#\{i, y \succeq_i x\}$
- La règle de Borda : pour chaque votant on calcule le nombre de point de chaque candidat (par exemple x-1 points pour le prremier, x-2 pour le second,...0 points pour le xième). On ajoute ensuite les points des candidats.

Exemples

- La majorité simple : $x \succeq_S y \Longleftrightarrow \#\{i, x \succeq_i y\} \geq \#\{i, y \succeq_i x\}$
- La règle de Borda : pour chaque votant on calcule le nombre de point de chaque candidat (par exemple x-1 points pour le prremier, x-2 pour le second,...0 points pour le xième). On ajoute ensuite les points des candidats.

Propriétés “souhaitées”

Définition

Condition I (Indépendance). Soit deux options $a, b \in X$ et deux n-listes $(\succeq_1, ..., \succeq_n), (\succeq'_1, ..., \succeq'_n) \in \mathscr{P}'^n$. Si les restrictions à a, b des préférences individuelles de chaque individu sont identiques dans les deux listes, c'est-‘a-dire si$\succeq_i \backslash \{a, b\} = \succeq'_i \backslash \{a, b\}$ pour tout $i \in N$, alors $\succeq_S \backslash \{a, b\} = \succeq'_S \backslash \{a, b\}$ où $\succeq_S = f(\succeq_1, ..., \succeq_n)$, $\succeq'_S = f(\succeq'_1, ..., \succeq'_n)$.

Définition

Condition P (Principe de Pareto). Soit $a, b \in X$ deux options et $(\succeq_1, ..., \succeq_n) \in \mathscr{P}'^n$. Si pour tout $i \in N$, $a \succ_i b$, alors $a \succ_S b$, où $\succ_S$ est la composante stricte de $\succeq_S = f(\succeq_1, ..., \succeq_n)$.

Définition

Un dictateur est un individu i tel que pour tout $x, y \in X$ et toute n-liste $(\succeq_1, ..., \succeq_n) \in \mathscr{P}'^n, x \succ_i y \Longrightarrow x \succ_S y)$ où $\succ_S$ est la composante stricte de $\succeq_S = f(\succeq_1, ..., \succeq_n).)$.

Propriétés "souhaitées"

Définition

Condition I (Indépendance). Soit deux options $a, b \in X$ et deux n-listes $(\succeq_1, \ldots, \succeq_n), (\succeq'_1, \ldots, \succeq'_n) \in \mathscr{P}'^n$. Si les restrictions à a, b des préférences individuelles de chaque individu sont identiques dans les deux listes, c'est-'a-dire si$\succeq_i \backslash\{a, b\} = \succeq'_i \backslash\{a, b\}$ pour tout $i \in N$, alors $\succeq_S \backslash\{a, b\} = \succeq'_S \backslash\{a, b\}$ où $\succeq_S = f(\succeq_1, \ldots, \succeq_n)$, $\succeq'_S = f(\succeq'_1, \ldots, \succeq'_n)$.

Définition

Condition P (Principe de Pareto). Soit $a, b \in X$ deux options et $(\succeq_1, \ldots, \succeq_n) \in \mathscr{P}'^n$. Si pour tout $i \in N$, $a \succ_i b$, alors $a \succ_S b$, où $\succ_S$ est la composante stricte de $\succeq_S = f(\succeq_1, \ldots, \succeq_n)$.

Définition

Un dictateur est un individu i tel que pour tout $x, y \in X$ et toute n-liste $(\succeq_1, \ldots, \succeq_n) \in \mathscr{P}'^n, x \succ_i y \Longrightarrow x \succ_S y$) où $\succ_S$ est la composante stricte de $\succeq_S = f(\succeq_1, \ldots, \succeq_n)$.).

Propriétés "souhaitées"

Définition

Condition I (Indépendance). Soit deux options $a, b \in X$ et deux n-listes $(\succeq_1, ..., \succeq_n), (\succeq'_1, ..., \succeq'_n) \in \mathscr{P}'^n$. Si les restrictions à a, b des préférences individuelles de chaque individu sont identiques dans les deux listes, c'est-'a-dire si$\succeq_i \backslash\{a, b\} = \succeq'_i \backslash\{a, b\}$ pour tout $i \in N$, alors $\succeq_S \backslash\{a, b\} = \succeq'_S \backslash\{a, b\}$ où $\succeq_S = f(\succeq_1, ..., \succeq_n)$, $\succeq'_S = f(\succeq'_1, ..., \succeq'_n)$.

Définition

Condition P (Principe de Pareto). Soit $a, b \in X$ deux options et $(\succeq_1, ..., \succeq_n) \in \mathscr{P}'^n$. Si pour tout $i \in N$, $a \succ_i b$, alors $a \succ_S b$, où $\succ_S$ est la composante stricte de $\succeq_S = f(\succeq_1, ..., \succeq_n)$.

Définition

Un dictateur est un individu i tel que pour tout $x, y \in X$ et toute n-liste $(\succeq_1, ..., \succeq_n) \in \mathscr{P}'^n, x \succ_i y \Longrightarrow x \succ_S y)$ où $\succ_S$ est la composante stricte de $\succeq_S = f(\succeq_1, ..., \succeq_n).)$.

Théorème

Théorème

Si $n > 2$*et* $\#X > 3$ *: Les seules fonctions d'utilité sociale à domaine universel vérifiant I et P sont celles où il existe un dictateur...*

Démonstration

Définition

décisivité : Un sous ensemble G de N est décisif pour f sur (x, y) : $\overline{D}^f_G(x, y)$, si et seulement si pour tous les profils tel que $\forall i \in G, x \succ_i y$ on a $x \succ_S y$

Définition

quasi décisivité : Un sous ensemble G de N est quasi décisif pour f sur (x, y) : $D^f_G(x, y)$, si et seulement si pour tous les profils tel que $\forall i \in G$, $x \succ_i y$ et $\forall i \notin G$ $y \succ_i x$ on a $x \succ_S y$

Démonstration

Définition

décisivité : Un sous ensemble G de N est décisif pour f sur (x, y) : $\overline{D}_G^f(x, y)$, si et seulement si pour tous les profils tel que $\forall i \in G, x \succ_i y$ on a $x \succ_S y$

Définition

quasi décisivité : Un sous ensemble G de N est quasi décisif pour f sur (x, y) : $D_G^f(x, y)$, si et seulement si pour tous les profils tel que $\forall i \in G$, $x \succ_i y$ et $\forall i \notin G$ $y \succ_i x$ on a $x \succ_S y$

Démonstration

Lemme

(expansion) Si $cardX \geq 3$ *, si* f *est à domaine universel et vérifie* I *et* P *alors s'il existe* G *tel que*

$$\left\{\exists (a,b)\, , \overline{D}_G^f(a,b)\right\} \Rightarrow \{\forall (x,y)\, , D_G^f(x,y)\}$$

Lemme

(contraction) Si $cardX \geq 3$ *, si* f *est à domaine universel et vérifie* I *et* P *alors si* G *est décisif alors il existe une partie propre de* G *décisive*

Démonstration

Lemme

(expansion) Si $cardX \geq 3$ *, si* f *est à domaine universel et vérifie* I *et* P *alors s'il existe* G *tel que*
$\left\{\exists (a,b)\,, \overline{D}_G^f(a,b)\right\} \Rightarrow \{\forall (x,y)\,, D_G^f(x,y)\}$

Lemme

(contraction) Si $cardX \geq 3$ *, si* f *est à domaine universel et vérifie* I *et* P *alors si* G *est décisif alors il existe une partie propre de* G *décisive*

Démonstration

D'où :

- P et le premier lemme implique que N est décisive,
- le deuxième implique que l'on peut retirer des éléments de N tout en restant décisif jusqu'au singleton

Démonstration

D'où :

- P et le premier lemme implique que N est décisive,
- le deuxième implique que l'on peut retirer des éléments de N tout en restant décisif jusqu'au singleton

Exemple

Example (Violation of IIA by Borda rule)

R_1	R_2	R_3	R'_1	R'_2	R'_3
a	d	d	a	d	d
c	c	c	b	c	c
b	a	a	d	a	a
d	b	b	c	b	b

les positions relatives de a et de c ne changent pas, et pourtant...

$s(a) = 5, s(b) = 1, s(c) = 6, s(d) = 6 \Longrightarrow c \succ a$

$s'(a) = 5, s'(b) = 2, s'(c) = 4, s'(d) = 7 \Longrightarrow a \succ c$

Solutions

Restriction du domaine des préférences

- Manipulation stratégique des procédures de choix collectifs : peut-on manipuler les procédures, lesquelles ?
- N individus (ou critères) ont des préférences strictes sur des options possibles X (linear orderings) notées ici P_i au lieu de $\succ_i$.
- On note $P_i(k)$ l'option classée $k$par i. $P_i(1)$ est la meilleure option pour i .

Définition

Fonction de Choix social FCS : $\mathscr{P}_s^n \to X$
$P_1, P_2.., P_n \to f\,(P_1, P_2.., P_n)$: sélectionne un élément de X

- Manipulation stratégique des procédures de choix collectifs : peut-on manipuler les procédures, lesquelles ?
- N individus (ou critères) ont des préférences strictes sur des options possibles X (linear orderings) notées ici P_i au lieu de $\succ_i$.
- On note $P_i(k)$ l'option classée $k$par i. $P_i(1)$ est la meilleure option pour i .

Définition

Fonction de Choix social FCS : $\mathscr{P}_s^n \to X$
$P_1, P_2.., P_n \to f(P_1, P_2.., P_n)$: sélectionne un élément de X

- Manipulation stratégique des procédures de choix collectifs : peut-on manipuler les procédures, lesquelles ?
- N individus (ou critères) ont des préférences strictes sur des options possibles X (linear orderings) notées ici P_i au lieu de $\succ_i$.
- On note $P_i(k)$ l'option classée $k$par i. $P_i(1)$ est la meilleure option pour i .

Définition

Fonction de Choix social FCS : $\mathscr{P}_s^n \to X$
$P_1, P_2.., P_n \to f\,(P_1, P_2.., P_n)$: sélectionne un élément de X

Définition

Une FCS est surjective quand $\forall x \in X$, $\exists P \in \mathscr{P}_s^n, f(P) = x$

Définition

Une FCS est monotone si $\forall P, P'$ $\{ f(P) = a$ et $\forall b, \forall i, aP_ib \Rightarrow aP'_ib \} \Rightarrow f(P') = a$

Si une FSC selectionne a pour un profil P et si dans P' la position de a ne s'est pas détériorée pour chacun des votants alors a doit être choisie pour P'

Définition

Une FCS est efficiente si : $\{\forall i \, aP_ib\} \Rightarrow f(P) \neq b$

Définition

Une FCS est surjective quand $\forall x \in X$, $\exists P \in \mathscr{P}_s^n, f(P) = x$

Définition

Une FCS est monotone si $\forall P, P' \ \{ f(P) = a$ et $\forall b, \forall i, aP_ib \Rightarrow aP'_ib \ \} \Rightarrow f\left(P'\right) = a$

Si une FSC selectionne a pour un profil P et si dans P' la position de a ne s'est pas détériorée pour chacun des votants alors a doit être choisie pour P'

Définition

Une FCS est efficiente si : $\{\forall i \, aP_ib\} \Rightarrow f\left(P\right) \neq b$

Définition

Une FCS est surjective quand $\forall x \in X$, $\exists P \in \mathscr{P}_s^n, f(P) = x$

Définition

Une FCS est monotone si $\forall P, P'$ $\{ f(P) = a$ et $\forall b, \forall i, aP_ib \Rightarrow aP_i'b \} \Rightarrow f(P') = a$

Si une FSC selectionne a pour un profil P et si dans P' la position de a ne s'est pas détériorée pour chacun des votants alors a doit être choisie pour P'

Définition

Une FCS est efficiente si : $\{\forall i \, aP_ib\} \Rightarrow f(P) \neq b$

Définition

Une FCS est unanime si $\forall i \in N \ , \ P_i(1) = a \Rightarrow f(P) = a$

- Idée : la FCS est un mécanisme. “L’organisateur” énonce la FCS et demande à chacun des votants de lui transmettre ses préférences. Il obtient un profil Q et prend la décision $f(Q)$.

- Soit le jeu : $(Q_1, Q_2, ..., Q_n) \to f(Q)$

Définition

La stratégie “répondre Q_i^1 “ domine, pour i, la stratégie “répondre Q_i^0 “ si $\forall Q_{-i}$ $f(Q_i^1, Q_{-i}) P_i f(Q_i^0, Q_{-i})$

Définition

La FSC est non manipulaple (en stratégie dominante) si répondre la vérité domine toutes les autres stratégies.

- Idée : la FCS est un mécanisme. “L’organisateur” énonce la FCS et demande à chacun des votants de lui transmettre ses préférences. Il obtient un profil Q et prend la décision $f(Q)$.
- Soit le jeu : $(Q_1, Q_2, ..., Q_n) \to f(Q)$

Définition

La stratégie “répondre Q_i^1 “ domine, pour i, la stratégie “répondre Q_i^0 “ si $\forall Q_{-i}\ f\left(Q_i^1, Q_{-i}\right) P_i f\left(Q_i^0, Q_{-i}\right)$

Définition

La FSC est non manipulaple (en stratégie dominante) si répondre la vérité domine toutes les autres stratégies.

- Idée : la FCS est un mécanisme. “L’organisateur” énonce la FCS et demande à chacun des votants de lui transmettre ses préférences. Il obtient un profil Q et prend la décision $f(Q)$.
- Soit le jeu : $(Q_1, Q_2, ..., Q_n) \rightarrow f(Q)$

Définition

La stratégie “répondre Q_i^1 “ domine, pour i, la stratégie “répondre Q_i^0 “ si $\forall Q_{-i}$ $f\left(Q_i^1, Q_{-i}\right) P_i f\left(Q_i^0, Q_{-i}\right)$

Définition

La FSC est non manipulaple (en stratégie dominante) si répondre la vérité domine toutes les autres stratégies.

- FCS Constante

Non manipulable mais pas surjective

- FCS vote à la pluralité (vote à un tour) avec règle de "tie break".

Surjective mais manipulable :

tie break= $\begin{bmatrix} \succ \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ et profil $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ a & b & c \\ b & c & b \\ c & a & a \end{bmatrix}$

- chaque candidat recueille 1 voix donc : a gagne

mais : manipulé par $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P'_3 \\ a & b & b \\ b & c & a \\ c & a & c \end{bmatrix}$ donc : b gagne

- FCS Constante

Non manipulable mais pas surjective

- FCS vote à la pluralité (vote à un tour) avec règle de “tie break”.

Surjective mais manipulable :

tie break$= \begin{bmatrix} \succ \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ et profil $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ a & b & c \\ b & c & b \\ c & a & a \end{bmatrix}$

- chaque candidat recueille 1 voix donc : a gagne

mais : manipulé par $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3' \\ a & b & b \\ b & c & a \\ c & a & c \end{bmatrix}$ donc : b gagne

- FCS Constante

Non manipulable mais pas surjective

- FCS vote à la pluralité (vote à un tour) avec règle de “tie break”.

Surjective mais manipulable :

tie break= $\begin{bmatrix} \succ \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ et profil $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ a & b & c \\ b & c & b \\ c & a & a \end{bmatrix}$

- chaque candidat recueille 1 voix donc : a gagne

mais : manipulé par $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3' \\ a & b & b \\ b & c & a \\ c & a & c \end{bmatrix}$ donc : b gagne

- FCS Borda (surjective mais manipulable) :

tie break$=\begin{bmatrix} \succ \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix}$ et profil $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ a & b & b \\ c & c & c \\ b & a & a \end{bmatrix}$

$s(a) = 2$, $s(b) = 5$, $s(c) = 2$ donc b gagne

manipulé par $\begin{bmatrix} P_1' & P_2 & P_3 \\ c & b & b \\ a & c & c \\ b & a & a \end{bmatrix}$

$s(a) = 1$, $s(b) = 4$, $s(c) = 4$ donc c gagne

- FCS Borda (surjective mais manipulable) :

tie break$= \begin{bmatrix} \succ \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix}$ et profil $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ a & b & b \\ c & c & c \\ b & a & a \end{bmatrix}$

$s(a) = 2$, $s(b) = 5$, $s(c) = 2$ donc b gagne

manipulé par $\begin{bmatrix} \color{red}{P_1'} & P_2 & P_3 \\ c & b & b \\ \color{red}{a} & c & c \\ b & a & a \end{bmatrix}$

$s(a) = 1$, $s(b) = 4$, $s(c) = 4$ donc c gagne

Théorème

f , FSC $\mathscr{P}_s^n \to X$ est non manipulable $\Longleftrightarrow$ f est monotone

H : f non manipulable

soit : P et P' tq $f(P) = a$ et $\forall b \; aP_i b \Rightarrow aP'_i b$

Passons de P à P' de la façon suivante

$$\begin{array}{llllllll}
P = P_0 & = [\, P_1 & P_2 & P_3 & & & & P_n \,] \\
P^1 & = [\, P'_1 & P_2 & P_3 & & & & P_n] \\
P^2 & = [\, P'_1 & P'_2 & P_3 & & & & P_n] \\
.. & & & & & & & P_n] \\
P^k & = [\, P'_1 & P'_2 & . & P'_k & P_{k+1} & P_{k+2} & P_n \,] \\
P^{k+1} & = [\, P'_1 & P'_2 & . & P'_k & P'_{k+1} & P_{k+2} & P_n] \\
.. & . & . & . & & & & \\
P' = P^n & = [P'_1 & & & & & & P'_n]
\end{array}$$

Par récurrence : $f\left(P^k\right) = a$

Théorème

f , FSC $\mathscr{P}_s^n \to X$ est non manipulable $\Longleftrightarrow$ f est monotone

H : f non manipulable

soit : P et P' tq $f(P) = a$ et $\forall b \; aP_i b \Rightarrow aP'_i b$

Passons de P à P' de la façon suivante

$$
\begin{array}{cllllllll}
P = P_0 & = [\, P_1 & P_2 & P_3 & & & & P_n \,] \\
P^1 & = [\, {P'}_1 & P_2 & P_3 & & & & P_n] \\
P^2 & = [\, P'_1 & P'_2 & P_3 & & & & P_n] \\
.. & & & & & & & P_n] \\
P^k & = [\, P'_1 & P'_2 & . & P'_k & P_{k+1} & P_{k+2} & P_n \,] \\
P^{k+1} & = [\, P'_1 & P'_2 & . & P'_k & P'_{k+1} & P_{k+2} & P_n] \\
.. & . & . & . & & & & \\
P' = P^n & = [P'_1 & & & & & & P'_n]
\end{array}
$$

Par récurrence : $f\left(P^k\right) = a$

Théorème

f , FSC $\mathscr{P}_s^n \to X$ est non manipulable $\Longleftrightarrow f$ est monotone

H : f non manipulable

soit : P et P' tq $f(P) = a$ et $\forall b \; aP_i b \Rightarrow aP'_i b$

Passons de P à P' de la façon suivante

$$
\begin{array}{cllllllll}
P = P_0 & = [\, P_1 & P_2 & P_3 & & & & & P_n \,] \\
P^1 & = [\, {P'}_1 & P_2 & P_3 & & & & & P_n] \\
P^2 & = [\, P'_1 & P'_2 & P_3 & & & & & P_n] \\
.. & & & & & & & & P_n] \\
P^k & = [\, P'_1 & P'_2 & . & P'_k & P_{k+1} & P_{k+2} & & P_n \,] \\
P^{k+1} & = [\, P'_1 & P'_2 & . & P'_k & P'_{k+1} & P_{k+2} & & P_n] \\
.. & \;\; . & . & . & & & & & \\
P' = P^n & = [P'_1 & & & & & & & P'_n]
\end{array}
$$

Par récurrence : $f\left(P^k\right) = a$

Lemme

surjective et monotone $\Longrightarrow$ *efficient*

Lemme

efficient $\Longrightarrow$ *unanime*

Lemme

unanime $\Longrightarrow$ *surjective*

Théorème

f *non manipulable :* f *surjective* $\Longleftrightarrow f$ *efficiente* $\Longleftrightarrow f$ *unanime*

Lemme

surjective et monotone $\Longrightarrow$ *efficient*

Lemme

efficient $\Longrightarrow$ *unanime*

Lemme

unanime $\Longrightarrow$ *surjective*

Théorème

f non manipulable : f surjective $\Longleftrightarrow$ *f efficiente* $\Longleftrightarrow$ *f unanime*

Lemme

surjective et monotone $\Longrightarrow$ *efficient*

Lemme

efficient $\Longrightarrow$ *unanime*

Lemme

unanime $\Longrightarrow$ *surjective*

Théorème

f non manipulable : f surjective $\Longleftrightarrow$ *f efficiente* $\Longleftrightarrow$ *f unanime*

Lemme

surjective et monotone $\Longrightarrow$ *efficient*

Lemme

efficient $\Longrightarrow$ *unanime*

Lemme

unanime $\Longrightarrow$ *surjective*

Théorème

f non manipulable : f surjective $\Longleftrightarrow$ *f efficiente* $\Longleftrightarrow$ *f unanime*

Théorème

$card\,(X) \geq 3$ f SCF $\mathscr{P}_s^n \rightarrow X$ *non manipulable* $\Longleftrightarrow$ f *est dictatorial*

Restreindre le domaine

Housing model

Fixed priority

$\succ_1$	$\succ_2$	$\succ_3$	$\succ_4$	$\succ_5$	$\succ_6$
a_3	a_3	a_1	a_2	a_2	a_1
a_1	a_2	a_4	a_1	a_1	a_3
a_2	a_1	a_3	a_5	a_6	a_2
a_4	a_5	a_2	a_4	a_4	a_4
a_5	a_4	a_6	a_3	a_5	a_6
a_6	a_6	a_5	a_6	a_3	a_5

Table 11: An example for housing model

We assume here $m = n$. To explain the mechanism, we start with the example in Table 11. In the first step of the TTC mechanism, agents are endowed with a house each. Suppose the *fixed endowment* for this example is a^*: $a^*(1) = a_1, a^*(2) = a_3, a^*(3) = a_2, a^*(4) = a_4, a^*(5) = a_5, a^*(6) = a_6$.

$\succ_{m_1}$	$\succ_{m_2}$	$\succ_{m_3}$	$\succ_{w_1}$	$\succ_{w_2}$	$\succ_{w_3}$
w_2	w_1	w_1	m_1	m_3	m_1
w_1	w_3	w_2	m_3	m_1	m_3
w_3	w_2	w_3	m_2	m_2	m_2

Table 12: Preference orderings of men and women