Théorie de la décision : Choix Social, Théorie du vote

D. Henriet

Ecole centrale Marseille, 2018

- Qu'est-ce que la théorie du choix social ?
- La formalisation du problème : hypothèses, définitions
- Les Conditions de "rationalité" et le théorème d'Arrow
- Les aspects stratégiques et le théorème de Gibbard-Satterthwaite
- Restriction du "domaine" : unimodalité et autres exemples

- Qu'est-ce que la théorie du choix social ?
- La formalisation du problème : hypothèses, définitions
- Les Conditions de "rationalité" et le théorème d'Arrow
- Les aspects stratégiques et le théorème de Gibbard-Satterthwaite
- Restriction du "domaine" : unimodalité et autres exemples

- Qu'est-ce que la théorie du choix social ?
- La formalisation du problème : hypothèses, définitions
- Les Conditions de "rationalité" et le théorème d'Arrow
- Les aspects stratégiques et le théorème de Gibbard-Satterthwaite
- Restriction du "domaine" : unimodalité et autres exemples

- Qu'est-ce que la théorie du choix social ?
- La formalisation du problème : hypothèses, définitions
- Les Conditions de "rationalité" et le théorème d'Arrow
- Les aspects stratégiques et le théorème de Gibbard-Satterthwaite
- Restriction du "domaine" : unimodalité et autres exemples

- Qu'est-ce que la théorie du choix social ?
- La formalisation du problème : hypothèses, définitions
- Les Conditions de "rationalité" et le théorème d'Arrow
- Les aspects stratégiques et le théorème de Gibbard-Satterthwaite
- Restriction du "domaine" : unimodalité et autres exemples

- Le choix social a pour objet la sélection d'options par un groupe d'individus
- N individus (ou critères) ont chacun un "avis" sur des options possibles X. Comment décider "collectivement" ?
- Exemples :
  - N électeurs devant choisir un élu ou une décision dans un ensemble X
  - N critères devant servir à choisir une option dans X
  - N courses automobiles pour obtenir un classement des pilotes X

- Le choix social a pour objet la sélection d'options par un groupe d'individus
- N individus (ou critères) ont chacun un "avis" sur des options possibles X. Comment décider "collectivement" ?
- Exemples :
  - N électeurs devant choisir un élu ou une décision dans un ensemble X
  - N critères devant servir à choisir une option dans X
  - N courses automobiles pour obtenir un classement des pilotes X

- Le choix social a pour objet la sélection d'options par un groupe d'individus
- N individus (ou critères) ont chacun un "avis" sur des options possibles X. Comment décider "collectivement" ?
- Exemples :
  - N électeurs devant choisir un élu ou une décision dans un ensemble X
  - N critères devant servir à choisir une option dans X
  - N courses automobiles pour obtenir un classement des pilotes X

- Le choix social a pour objet la sélection d'options par un groupe d'individus
- N individus (ou critères) ont chacun un “avis” sur des options possibles X. Comment décider “collectivement” ?
- Exemples :
  - N électeurs devant choisir un élu ou une décision dans un ensemble X
  - N critères devant servir à choisir une option dans X
  - N courses automobiles pour obtenir un classement des pilotes X

- Le choix social a pour objet la sélection d'options par un groupe d'individus
- N individus (ou critères) ont chacun un "avis" sur des options possibles X. Comment décider "collectivement" ?
- Exemples :
    - N électeurs devant choisir un élu ou une décision dans un ensemble X
    - N critères devant servir à choisir une option dans X
    - N courses automobiles pour obtenir un classement des pilotes X

- Le choix social a pour objet la sélection d'options par un groupe d'individus
- N individus (ou critères) ont chacun un "avis" sur des options possibles X. Comment décider "collectivement" ?
- Exemples :
  - N électeurs devant choisir un élu ou une décision dans un ensemble X
  - N critères devant servir à choisir une option dans X
  - N courses automobiles pour obtenir un classement des pilotes X

Hypothèses, définitions

- Soit X un ensemble d'options (des états sociaux, quel que soit le sens qu'on puisse leur donner, des candidats à une élection, des allocations etc...). $\#X$ est le cardinal de cet ensemble. Une "préférence" sur X sera alors une relation binaire.

Définition

Une relation binaire sur X $\succeq$ est un ensemble de couples (x, y) une partie du produit cartésien $X \times X$. On note $x \succeq y$ lorsque le couple "appartient" à la relation. On lira intuitivement 'x est au moins aussi bon que y'.

Définition

La relation de préférence est réflexive : pour tout x : $x \succeq x$!

Définition

Partie stricte : $x \succ y \Longleftrightarrow x \succeq y$,et *non*$[y \succeq x]$
Partie symétrique (indifférence) $x \sim y \Longleftrightarrow x \succeq y$,et $y \succeq x$

Hypothèses, définitions

- Soit X un ensemble d'options (des états sociaux, quel que soit le sens qu'on puisse leur donner, des candidats à une élection, des allocations etc...). $\#X$ est le cardinal de cet ensemble. Une "préférence" sur X sera alors une relation binaire.

Définition

Une relation binaire sur X $\succeq$ est un ensemble de couples (x, y) une partie du produit cartésien $X \times X$. On note $x \succeq y$ lorsque le couple "appartient" à la relation. On lira intuitivement 'x est au moins aussi bon que y'.

Définition

La relation de préférence est réflexive : pour tout x : $x \succeq x$!

Définition

Partie stricte : $x \succ y \Longleftrightarrow x \succeq y$,et *non*$[y \succeq x]$
Partie symétrique (indifférence) $x \sim y \Longleftrightarrow x \succeq y$,et $y \succeq x$

Hypothèses, définitions

- Soit X un ensemble d'options (des états sociaux, quel que soit le sens qu'on puisse leur donner, des candidats à une élection, des allocations etc...). $\#X$ est le cardinal de cet ensemble. Une "préférence" sur X sera alors une relation binaire.

Définition

Une relation binaire sur X $\succeq$ est un ensemble de couples (x, y) une partie du produit cartésien $X \times X$. On note $x \succeq y$ lorsque le couple "appartient" à la relation. On lira intuitivement 'x est au moins aussi bon que y'.

Définition

La relation de préférence est réflexive : pour tout x : $x \succeq x$!

Définition

Partie stricte : $x \succ y \iff x \succeq y$,et *non* $[y \succeq x]$
Partie symétrique (indifférence) $x \sim y \iff x \succeq y$,et $y \succeq x$

Hypothèses, définitions

- Soit X un ensemble d'options (des états sociaux, quel que soit le sens qu'on puisse leur donner, des candidats à une élection, des allocations etc...). $\#X$ est le cardinal de cet ensemble. Une "préférence" sur X sera alors une relation binaire.

Définition

Une relation binaire sur X $\succeq$ est un ensemble de couples (x, y) une partie du produit cartésien $X \times X$. On note $x \succeq y$ lorsque le couple "appartient" à la relation. On lira intuitivement 'x est au moins aussi bon que y'.

Définition

La relation de préférence est réflexive : pour tout x : $x \succeq x$!

Définition

Partie stricte : $x \succ y \iff x \succeq y$,et *non* $[y \succeq x]$
Partie symétrique (indifférence) $x \sim y \iff x \succeq y$,et $y \succeq x$

Hypothèses, définitions

- Conditions de rationalité sur les préférences

Définition

$\succeq$ est transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succeq y \, et \, y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$.

Définition

$\succeq$ est quasi-transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succ y \, et \, y \succ z \Rightarrow x \succ z$. , i.e., si $\succ$est transitive.

Définition

$\succ$ est acyclique s'il n'existe pas de partie finie de X, $\{x_1, ..., x_k\}$telle que$x_1 \succ x_2, x_2 \succ x_3 ... etx \succ x_k, x_k \succ x_1$. Si la relation binaire est transitive, elle est aussi quasi transitive et sa composante stricte est acyclique,.

Définition

Un préordre sur X est une relation binaire réflexive et transitive.

Hypothèses, définitions

- Conditions de rationalité sur les préférences

Définition

$\succeq$ est transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succeq y$ et $y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$.

Définition

$\succeq$ est quasi-transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succ y$ et $y \succ z \Rightarrow x \succ z$. , i.e., si $\succ$est transitive.

Définition

$\succ$ est acyclique s'il n'existe pas de partie finie de X, $\{x_1, ..., x_k\}$telle que$x_1 \succ x_2, x_2 \succ x_3 ... etx \succ x_k, x_k \succ x_1$. Si la relation binaire est transitive, elle est aussi quasi transitive et sa composante stricte est acyclique,.

Définition

Un préordre sur X est une relation binaire réflexive et transitive.

Hypothèses, définitions

- Conditions de rationalité sur les préférences

Définition

$\succeq$ est transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succeq y$ *et* $y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$.

Définition

$\succeq$ est quasi-transitive si pour tout
$x, y, z \in X$, $x \succ y$ *et* $y \succ z \Rightarrow x \succ z$. , i.e., si $\succ$est transitive.

Définition

$\succ$ est acyclique s'il n'existe pas de partie finie de X, $\{x_1, ..., x_k\}$telle que$x_1 \succ x_2, x_2 \succ x_3 ... etx \succ x_k, x_k \succ x_1$. Si la relation binaire est transitive, elle est aussi quasi transitive et sa composante stricte est acyclique,.

Définition

Un préordre sur X est une relation binaire réflexive et transitive.

Hypothèses, définitions

- Conditions de rationalité sur les préférences

Définition

$\succeq$ est transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succeq y$ *et* $y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$.

Définition

$\succeq$ est quasi-transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succ y$ *et* $y \succ z \Rightarrow x \succ z$. , i.e., si $\succ$est transitive.

Définition

$\succ$ est acyclique s'il n'existe pas de partie finie de X, $\{x_1, ..., x_k\}$telle que$x_1 \succ x_2, x_2 \succ x_3 ... etx \succ x_k, x_k \succ x_1$. Si la relation binaire est transitive, elle est aussi quasi transitive et sa composante stricte est acyclique,.

Définition

Un préordre sur X est une relation binaire réflexive et transitive.

Hypothèses, définitions

- Conditions de rationalité sur les préférences

Définition

$\succeq$ est transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $x \succeq y$ et $y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$.

Définition

$\succeq$ est quasi-transitive si pour tout
$x, y, z \in X$, $x \succ y$ et $y \succ z \Rightarrow x \succ z$. , i.e., si $\succ$est transitive.

Définition

$\succ$ est acyclique s'il n'existe pas de partie finie de X, $\{x_1, ..., x_k\}$telle que$x_1 \succ x_2, x_2 \succ x_3 ... etx \succ x_k, x_k \succ x_1$. Si la relation binaire est transitive, elle est aussi quasi transitive et sa composante stricte est acyclique,.

Définition

Un préordre sur X est une relation binaire réflexive et transitive.

Hypothèses, définitions

Définition

$\succeq$ est complète si pour tout $x, y \in X$, $x \succeq y \, ou \, y \succeq x$.

Définition

Un ordre linéaire est un préordre complet et antisymétrique i.e
$x \succeq y \, et \, y \succeq x \Longrightarrow x = y$.
Un ordre linéaire est un classement sans ex-aequo...

- On notera
  - $\mathscr{B}$ l'ensemble des relation binaires complète sur X,
  - $\mathscr{P}$ l'ensemble des préordres complets sur X,

Hypothèses, définitions

Définition

$\succeq$ est complète si pour tout $x, y \in X$, $x \succeq y$ *ou* $y \succeq x$.

Définition

Un ordre linéaire est un préordre complet et antisymétrique i.e
$x \succeq y$ *et* $y \succeq x \Longrightarrow x = y$.
Un ordre linéaire est un classement sans ex-aequo...

- On notera
  - $\mathscr{B}$ l'ensemble des relation binaires complète sur X,
  - $\mathscr{P}$ l'ensemble des préordres complets sur X,

Hypothèses, définitions

Définition

$\succeq$ est complète si pour tout $x, y \in X$, $x \succeq y$ *ou* $y \succeq x$.

Définition

Un ordre linéaire est un préordre complet et antisymétrique i.e
$x \succeq y$ *et* $y \succeq x \Longrightarrow x = y$.
Un ordre linéaire est un classement sans ex-aequo...

- On notera
  - $\mathscr{B}$ l'ensemble des relation binaires complète sur X,
  - $\mathscr{P}$ l'ensemble des préordres complets sur X,

Hypothèses, définitions

Au lieu de $\succeq$ et $\succ$ on pourra par la suite noter R et P la relation de préférence et de préférence stricte

Hypothèses, définitions

- Les individus ou critères
- On se donne un ensemble N d'individus (en nombre fini n), chacun muni d'une préférence (préordre complet) $\succeq_i$.
- Le problème central du choix social est celui du passage d'une donnée de préférences individuelles—une par individu—à une préférence sociale, notée $\succeq_S$, ou à un choix, un élément de X ou une partie de X

Hypothèses, définitions

- Les individus ou critères
- On se donne un ensemble N d'individus (en nombre fini n), chacun muni d'une préférence (préordre complet) $\succeq_i$.
- Le problème central du choix social est celui du passage d'une donnée de préférences individuelles—une par individu—à une préférence sociale, notée $\succeq_S$, ou à un choix, un élément de X ou une partie de X

Hypothèses, définitions

- Les individus ou critères
- On se donne un ensemble N d'individus (en nombre fini n), chacun muni d'une préférence (préordre complet) $\succeq_i$.
- Le problème central du choix social est celui du passage d'une donnée de préférences individuelles—une par individu—à une préférence sociale, notée $\succeq_S$, ou à un choix, un élément de X ou une partie de X

Hypothèses, définitions

Définition

Une fonction d'agrégation de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans $\mathscr{B}$ qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre une relation binaire $\succeq_S$

Définition

Une fonction d'utilité sociale de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre un préordre complet $\succeq_S$

Définition

Une fonction de choix social de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans X qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre un élément de X

Définition

Une fonction d'agrégation ou d'utilité est à domaine universel quand elle est définie sur tout $\mathscr{P}$

Hypothèses, définitions

Définition

Une fonction d'agrégation de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans $\mathscr{B}$ qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre une relation binaire $\succeq_S$

Définition

Une fonction d'utilité sociale de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre un préordre complet $\succeq_S$

Définition

Une fonction de choix social de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans X qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre un élément de X

Définition

Une fonction d'agrégation ou d'utilité est à domaine universel quand elle est définie sur tout $\mathscr{P}$

Hypothèses, définitions

Définition

Une fonction d'agrégation de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans $\mathscr{B}$ qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre une relation binaire $\succeq_S$

Définition

Une fonction d'utilité sociale de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre un préordre complet $\succeq_S$

Définition

Une fonction de choix social de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans X qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre un élément de X

Définition

Une fonction d'agrégation ou d'utilité est à domaine universel quand elle est définie sur tout $\mathscr{P}$

Hypothèses, définitions

Définition

Une fonction d'agrégation de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans $\mathscr{B}$ qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre une relation binaire $\succeq_S$

Définition

Une fonction d'utilité sociale de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre un préordre complet $\succeq_S$

Définition

Une fonction de choix social de domaine $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ est une application de $\mathscr{P}'$ dans X qui à tout profil $(\succeq_1, \ldots, \succeq_i, \ldots \succeq_n)$ fait correspondre un élément de X

Définition

Une fonction d'agrégation ou d'utilité est à domaine universel quand elle est définie sur tout $\mathscr{P}$

Exemples

- La majorité simple : $x \succeq_S y \Longleftrightarrow \#\{i, x \succeq_i y\} \geq \#\{i, y \succeq_i x\}$
- La règle de Borda : pour chaque votant on calcule le nombre de point de chaque candidat (par exemple x-1 points pour le prremier, x-2 pour le second,...0 points pour le xième). On ajoute ensuite les points des candidats.

Exemples

- La majorité simple : $x \succeq_S y \Longleftrightarrow \#\{i, x \succeq_i y\} \geq \#\{i, y \succeq_i x\}$
- La règle de Borda : pour chaque votant on calcule le nombre de point de chaque candidat (par exemple x-1 points pour le prremier, x-2 pour le second,...0 points pour le xième). On ajoute ensuite les points des candidats.

Propriétés "souhaitées"

Définition

Condition I (Indépendance). Soit deux options $a, b \in X$ et deux n-listes $(\succeq_1, ..., \succeq_n), (\succeq'_1, ..., \succeq'_n) \in \mathscr{P}'^n$. Si les restrictions à a, b des préférences individuelles de chaque individu sont identiques dans les deux listes, c'est-'a-dire si$\succeq_i \setminus \{a, b\} = \succeq'_i \setminus \{a, b\}$ pour tout $i \in N$, alors $\succeq_S \setminus \{a, b\} = \succeq'_S \setminus \{a, b\}$ où $\succeq_S = f(\succeq_1, ..., \succeq_n)$, $\succeq'_S = f(\succeq'_1, ..., \succeq'_n)$.

Définition

Condition P (Principe de Pareto). Soit $a, b \in X$ deux options et $(\succeq_1, ..., \succeq_n) \in \mathscr{P}'^n$. Si pour tout $i \in N$, $a \succ_i b$, alors $a \succ_S b$, où $\succ_S$ est la composante stricte de $\succeq_S = f(\succeq_1, ..., \succeq_n)$.

Définition

Un dictateur est un individu i tel que pour tout $x, y \in X$ et toute n-liste $(\succeq_1, ..., \succeq_n) \in \mathscr{P}'^n, x \succ_i y \Longrightarrow x \succ_S y)$ où $\succ_S$ est la composante stricte de $\succeq_S = f(\succeq_1, ..., \succeq_n).)$.

Propriétés "souhaitées"

Définition

Condition I (Indépendance). Soit deux options $a, b \in X$ et deux n-listes $(\succeq_1, \dots, \succeq_n), (\succeq'_1, \dots, \succeq'_n) \in \mathscr{P}'^n$. Si les restrictions à a, b des préférences individuelles de chaque individu sont identiques dans les deux listes, c'est-'a-dire si$\succeq_i \setminus \{a, b\} = \succeq'_i \setminus \{a, b\}$ pour tout $i \in N$, alors $\succeq_S \setminus \{a, b\} = \succeq'_S \setminus \{a, b\}$ où $\succeq_S = f(\succeq_1, \dots, \succeq_n)$, $\succeq'_S = f(\succeq'_1, \dots, \succeq'_n)$.

Définition

Condition P (Principe de Pareto). Soit $a, b \in X$ deux options et $(\succeq_1, \dots, \succeq_n) \in \mathscr{P}'^n$. Si pour tout $i \in N$, $a \succ_i b$, alors $a \succ_S b$, où $\succ_S$ est la composante stricte de $\succeq_S = f(\succeq_1, \dots, \succeq_n)$.

Définition

Un dictateur est un individu i tel que pour tout $x, y \in X$ et toute n-liste $(\succeq_1, \dots, \succeq_n) \in \mathscr{P}'^n, x \succ_i y \Longrightarrow x \succ_S y)$ où $\succ_S$ est la composante stricte de $\succeq_S = f(\succeq_1, \dots, \succeq_n)$.).

Propriétés "souhaitées"

Définition

Condition I (Indépendance). Soit deux options $a, b \in X$ et deux n-listes $(\succeq_1, \ldots, \succeq_n), (\succeq'_1, \ldots, \succeq'_n) \in \mathscr{P}'^n$. Si les restrictions à a, b des préférences individuelles de chaque individu sont identiques dans les deux listes, c'est-'a-dire si$\succeq_i \setminus \{a, b\} = \succeq'_i \setminus \{a, b\}$ pour tout $i \in N$, alors $\succeq_S \setminus \{a, b\} = \succeq'_S \setminus \{a, b\}$ où $\succeq_S = f(\succeq_1, \ldots, \succeq_n)$, $\succeq'_S = f(\succeq'_1, \ldots, \succeq'_n)$.

Définition

Condition P (Principe de Pareto). Soit $a, b \in X$ deux options et $(\succeq_1, \ldots, \succeq_n) \in \mathscr{P}'^n$. Si pour tout $i \in N$, $a \succ_i b$, alors $a \succ_S b$, où $\succ_S$ est la composante stricte de $\succeq_S = f(\succeq_1, \ldots, \succeq_n)$.

Définition

Un dictateur est un individu i tel que pour tout $x, y \in X$ et toute n-liste $(\succeq_1, \ldots, \succeq_n) \in \mathscr{P}'^n, x \succ_i y \Longrightarrow x \succ_S y)$ où $\succ_S$ est la composante stricte de $\succeq_S = f(\succeq_1, \ldots, \succeq_n)$.).

Théorème

Théorème

Si $n > 2$*et* $\#X > 3$ *: Les seules fonctions d'utilité sociale à domaine universel vérifiant* I *et* P *sont celles où il existe un dictateur...*

Paradoxe de Condorcet

Règle de la majorité : $x \succ_S y \Leftrightarrow \#\{i, x \succeq_i y\} > \#\{i, y \succeq_i x\}$

$$\begin{bmatrix} \succ_1 & \succ_2 & \succ_3 \\ a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix} \Longrightarrow a \succ_S b \succ_S c \succ_S a$$

Démonstration

Lemme

(expansion) Si $cardX \geq 3$ *, si* f *est à domaine universel et vérifie* I *et* P *alors s'il existe* G *tel que*

$$\left\{\exists (a,b)\,,\overline{D}_G^f(a,b)\right\} \Rightarrow \left\{\forall (x,y)\,,D_G^f(x,y)\right\}$$

Lemme

(contraction) Si $cardX \geq 3$ *, si* f *est à domaine universel et vérifie* I *et* P *alors si* G *est décisif alors il existe une partie propre de* G *décisive*

Démonstration

Lemme

(expansion) Si $cardX \geq 3$ *, si* f *est à domaine universel et vérifie* I *et* P *alors s'il existe* G *tel que*
$\left\{\exists (a,b), \overline{D}_G^f(a,b)\right\} \Rightarrow \{\forall (x,y), D_G^f(x,y)\}$

Lemme

(contraction) Si $cardX \geq 3$ *, si* f *est à domaine universel et vérifie* I *et* P *alors si* G *est décisif alors il existe une partie propre de* G *décisive*

Démonstration

D'où :

- P et le premier lemme implique que N est décisive,
- le deuxième implique que l'on peut retirer des éléments de N tout en restant décisif jusqu'au singleton

Démonstration

D'où :

- P et le premier lemme implique que N est décisive,
- le deuxième implique que l'on peut retirer des éléments de N tout en restant décisif jusqu'au singleton

Exemple

Example (Violation of IIA by Borda rule)

R_1	R_2	R_3	R'_1	R'_2	R'_3
a	d	d	a	d	d
c	c	c	b	c	c
b	a	a	d	a	a
d	b	b	c	b	b

les positions relatives de a et de c ne changent pas, et pourtant...

$s(a) = 5, s(b) = 1, s(c) = 6, s(d) = 6 \Longrightarrow c \succ a$

$s'(a) = 5, s'(b) = 2, s'(c) = 4, s'(d) = 7 \Longrightarrow a \succ c$

- Manipulation stratégique des procédures de choix collectifs : peut-on manipuler les procédures, lesquelles ?
- N individus (ou critères) ont des préférences strictes sur des options possibles X (linear orderings) notées ici P_i au lieu de $\succ_i$.
- On note $P_i(k)$ l'option classée $k$par i. $P_i(1)$ est la meilleure option pour i .

Définition

Fonction de Choix social FCS : $\mathscr{P}_s^n \to X$
$P_1, P_2.., P_n \to f(P_1, P_2.., P_n)$: sélectionne un élément de X

- Manipulation stratégique des procédures de choix collectifs : peut-on manipuler les procédures, lesquelles ?
- N individus (ou critères) ont des préférences strictes sur des options possibles X (linear orderings) notées ici P_i au lieu de $\succ_i$.
- On note $P_i(k)$ l'option classée $k$par i. $P_i(1)$ est la meilleure option pour i .

Définition

Fonction de Choix social FCS : $\mathscr{P}_s^n \to X$
$P_1, P_2.., P_n \to f(P_1, P_2.., P_n)$: sélectionne un élément de X

- Manipulation stratégique des procédures de choix collectifs : peut-on manipuler les procédures, lesquelles ?
- N individus (ou critères) ont des préférences strictes sur des options possibles X (linear orderings) notées ici P_i au lieu de $\succ_i$.
- On note $P_i(k)$ l'option classée $k$par i. $P_i(1)$ est la meilleure option pour i .

Définition

Fonction de Choix social FCS : $\mathscr{P}_s^n \to X$
$P_1, P_2.., P_n \to f\,(P_1, P_2.., P_n)$: sélectionne un élément de X

Définition

Une FCS est surjective quand $\forall x \in X$, $\exists P \in \mathscr{P}_s^n, f(P) = x$

Définition

Une FCS est monotone si $\forall P, P'$ $\{ f(P) = a$ et $\forall b, \forall i, aP_ib \Rightarrow aP'_ib \} \Rightarrow f(P') = a$

Si une FSC selectionne a pour un profil P et si dans P' la position de a ne s'est pas détériorée pour chacun des votants alors a doit être choisie pour P'

Définition

Une FCS est efficiente si : $\{\forall i\, aP_ib\} \Rightarrow f(P) \neq b$

Définition

Une FCS est surjective quand $\forall x \in X$, $\exists P \in \mathscr{P}_s^n, f(P) = x$

Définition

Une FCS est monotone si $\forall P, P' \ \{ f(P) = a$ et
$\forall b, \forall i,\ aP_i b \Rightarrow aP'_i b \ \} \Rightarrow f(P') = a$

Si une FSC selectionne a pour un profil P et si dans P' la position de a ne s'est pas détériorée pour chacun des votants alors a doit être choisie pour P'

Définition

Une FCS est efficiente si : $\{\forall i\ aP_i b\} \Rightarrow f(P) \neq b$

Définition

Une FCS est surjective quand $\forall x \in X$, $\exists P \in \mathscr{P}_s^n, f(P) = x$

Définition

Une FCS est monotone si $\forall P, P'$ $\{ f(P) = a$ et $\forall b, \forall i, aP_ib \Rightarrow aP_i'b \} \Rightarrow f(P') = a$

Si une FSC selectionne a pour un profil P et si dans P' la position de a ne s'est pas détériorée pour chacun des votants alors a doit être choisie pour P'

Définition

Une FCS est efficiente si : $\{\forall i \, aP_ib\} \Rightarrow f(P) \neq b$

Définition

Une FCS est unanime si $\forall i \in N \;,\; P_i(1) = a \Rightarrow f(P) = a$

- Idée : la FCS est un mécanisme. "L'organisateur" énonce la FCS et demande à chacun des votants de lui transmettre ses préférences. Il obtient un profil Q et prend la décision $f(Q)$.

- Soit le jeu : $(Q_1, Q_2, ..., Q_n) \to f(Q)$

Définition

La stratégie "répondre Q_i^1 " domine, pour i, la stratégie "répondre Q_i^0 " si $\forall Q_{-i}\ f\left(Q_i^1, Q_{-i}\right) P_i f\left(Q_i^0, Q_{-i}\right)$

Définition

La FSC est non manipulaple (en stratégie dominante) si répondre la vérité domine toutes les autres stratégies.

- Idée : la FCS est un mécanisme. “L’organisateur” énonce la FCS et demande à chacun des votants de lui transmettre ses préférences. Il obtient un profil Q et prend la décision $f(Q)$.
- Soit le jeu : $(Q_1, Q_2, ..., Q_n) \to f(Q)$

Définition

La stratégie “répondre Q_i^1 “ domine, pour i, la stratégie “répondre Q_i^0 “ si $\forall Q_{-i}\ f\left(Q_i^1, Q_{-i}\right) P_i f\left(Q_i^0, Q_{-i}\right)$

Définition

La FSC est non manipulaple (en stratégie dominante) si répondre la vérité domine toutes les autres stratégies.

- Idée : la FCS est un mécanisme. “L’organisateur” énonce la FCS et demande à chacun des votants de lui transmettre ses préférences. Il obtient un profil Q et prend la décision $f(Q)$.
- Soit le jeu : $(Q_1, Q_2, ..., Q_n) \to f(Q)$

Définition

La stratégie “répondre Q_i^1 “ domine, pour i, la stratégie “répondre Q_i^0 “ si $\forall Q_{-i}\ f\left(Q_i^1, Q_{-i}\right) P_i f\left(Q_i^0, Q_{-i}\right)$

Définition

La FSC est non manipulaple (en stratégie dominante) si répondre la vérité domine toutes les autres stratégies.

- FCS Constante

Non manipulable mais pas surjective

- FCS vote à la pluralité (vote à un tour) avec règle de “tie break”.

Surjective mais manipulable :

tie break= $\begin{bmatrix} \succ \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ et profil $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ a & b & c \\ b & c & b \\ c & a & a \end{bmatrix}$

- chaque candidat recueille 1 voix donc : a gagne

mais : manipulé par $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P'_3 \\ a & b & b \\ b & c & a \\ c & a & c \end{bmatrix}$ donc : b gagne

- FCS Constante

Non manipulable mais pas surjective

- FCS vote à la pluralité (vote à un tour) avec règle de “tie break”.

Surjective mais manipulable :

tie break$= \begin{bmatrix} \succ \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ et profil $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ a & b & c \\ b & c & b \\ c & a & a \end{bmatrix}$

- chaque candidat recueille 1 voix donc : a gagne

mais : manipulé par $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P'_3 \\ a & b & b \\ b & c & a \\ c & a & c \end{bmatrix}$ donc : b gagne

- FCS Constante

Non manipulable mais pas surjective

- FCS vote à la pluralité (vote à un tour) avec règle de "tie break".

Surjective mais manipulable :

$$\text{tie break}= \begin{bmatrix} \succ \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ et profil } \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ a & b & c \\ b & c & b \\ c & a & a \end{bmatrix}$$

- chaque candidat recueille 1 voix donc : a gagne

$$\text{mais : manipulé par } \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3' \\ a & b & b \\ b & c & a \\ c & a & c \end{bmatrix} \text{ donc : b gagne}$$

- FCS Borda (surjective mais manipulable) :

tie break= $\begin{bmatrix} \succ \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix}$ et profil $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ a & b & b \\ c & c & c \\ b & a & a \end{bmatrix}$

$s(a) = 2$, $s(b) = 5$, $s(c) = 2$ donc b gagne

manipulé par $\begin{bmatrix} P_1' & P_2 & P_3 \\ c & b & b \\ a & c & c \\ b & a & a \end{bmatrix}$

$s(a) = 1$, $s(b) = 4$, $s(c) = 4$ donc c gagne

- FCS Borda (surjective mais manipulable) :

tie break$=\begin{bmatrix} \succ \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix}$ et profil $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ a & b & b \\ c & c & c \\ b & a & a \end{bmatrix}$

$s(a) = 2$, $s(b) = 5$, $s(c) = 2$ donc b gagne

manipulé par $\begin{bmatrix} {\color{red}P_1'} & P_2 & P_3 \\ c & b & b \\ {\color{red}a} & c & c \\ b & a & a \end{bmatrix}$

$s(a) = 1$, $s(b) = 4$, $s(c) = 4$ donc c gagne

Théorème

f , FSC $\mathscr{P}_s^n \to X$ est non manipulable $\Longleftrightarrow$ f est monotone

H : f non manipulable

soit : P et P' tq $f(P) = a$ et $\forall b \; aP_ib \Rightarrow aP'_ib$

Passons de P à P' de la façon suivante

$$\begin{array}{lllllllll}
P = P_0 & = [\, P_1 & P_2 & P_3 & & & & & P_n \,] \\
P^1 & = [\, {P'}_1 & P_2 & P_3 & & & & & P_n] \\
P^2 & = [\, P'_1 & P'_2 & P_3 & & & & & P_n] \\
.. & & & & & & & & P_n] \\
P^k & = [\, P'_1 & P'_2 & . & & P'_k & P_{k+1} & P_{k+2} & P_n \,] \\
P^{k+1} & = [\, P'_1 & P'_2 & . & & P'_k & P'_{k+1} & P_{k+2} & P_n] \\
.. & . & . & . & & & & & \\
P' = P^n & = [P'_1 & & & & & & & P'_n \,]
\end{array}$$

Par récurrence : $f\left(P^k\right) = a$

Théorème

f , FSC $\mathscr{P}_s^n \to X$ est non manipulable $\Longleftrightarrow f$ est monotone

H : f non manipulable

soit : P et P' tq $f(P) = a$ et $\forall b \ aP_i b \Rightarrow aP'_i b$

Passons de P à P' de la façon suivante

$$
\begin{array}{llllllll}
P = P_0 & = [\, P_1 & P_2 & P_3 & & & & P_n \,] \\
P^1 & = [\, P'_1 & P_2 & P_3 & & & & P_n] \\
P^2 & = [\, P'_1 & P'_2 & P_3 & & & & P_n] \\
.. & & & & & & & P_n] \\
P^k & = [\, P'_1 & P'_2 & . & P'_k & P_{k+1} & P_{k+2} & P_n \,] \\
P^{k+1} & = [\, P'_1 & P'_2 & . & P'_k & P'_{k+1} & P_{k+2} & P_n] \\
.. & . & . & . & & & & \\
P' = P^n & = [P'_1 & & & & & & P'_n]
\end{array}
$$

Par récurrence : $f(P^k) = a$

Théorème

f , FSC $\mathscr{P}_s^n \to X$ est non manipulable $\Longleftrightarrow f$ est monotone

H : f non manipulable

soit : P et P' tq $f(P) = a$ et $\forall b \ aP_i b \Rightarrow aP'_i b$

Passons de P à P' de la façon suivante

$$
\begin{array}{lllllllll}
P = P_0 & = [\ P_1 & P_2 & P_3 & & & & P_n\ ] \\
P^1 & = [\ {P'}_1 & P_2 & P_3 & & & & P_n] \\
P^2 & = [\ P'_1 & P'_2 & P_3 & & & & P_n] \\
.. & & & & & & & P_n] \\
P^k & = [\ P'_1 & P'_2 & . & P'_k & P_{k+1} & P_{k+2} & P_n\ ] \\
P^{k+1} & = [\ P'_1 & P'_2 & . & P'_k & P'_{k+1} & P_{k+2} & P_n] \\
.. & \quad . & . & . & & & & \\
P' = P^n & = [P'_1 & & & & & & P'_n]
\end{array}
$$

Par récurrence : $f\left(P^k\right) = a$

Lemme

surjective et monotone $\Longrightarrow$ *efficient*

Lemme

efficient $\Longrightarrow$ *unanime*

Lemme

unanime $\Longrightarrow$ *surjective*

Théorème

f non manipulable : f surjective $\Longleftrightarrow$ *f efficiente* $\Longleftrightarrow$ *f unanime*

Lemme

surjective et monotone $\Longrightarrow$ *efficient*

Lemme

efficient $\Longrightarrow$ *unanime*

Lemme

unanime $\Longrightarrow$ *surjective*

Théorème

f *non manipulable :* f *surjective* $\Longleftrightarrow f$ *efficiente* $\Longleftrightarrow f$ *unanime*

Lemme

surjective et monotone $\Longrightarrow$ *efficient*

Lemme

efficient $\Longrightarrow$ *unanime*

Lemme

unanime $\Longrightarrow$ *surjective*

Théorème

f non manipulable : f surjective $\Longleftrightarrow f$ efficiente $\Longleftrightarrow f$ unanime

Lemme

surjective et monotone $\Longrightarrow$ *efficient*

Lemme

efficient $\Longrightarrow$ *unanime*

Lemme

unanime $\Longrightarrow$ *surjective*

Théorème

f *non manipulable :* f *surjective* $\Longleftrightarrow f$ *efficiente* $\Longleftrightarrow f$ *unanime*

Théorème

$card\,(X) \geq 3$ f SCF $\mathscr{P}_s^n \to X$ *non manipulable et surjective* $\Longleftrightarrow$ f *est dictatorial*

Restreindre le domaine : single peaked preferences

Housing model

Fixed priority

$\succ_1$	$\succ_2$	$\succ_3$	$\succ_4$	$\succ_5$	$\succ_6$
a_3	a_3	a_1	a_2	a_2	a_1
a_1	a_2	a_4	a_1	a_1	a_3
a_2	a_1	a_3	a_5	a_6	a_2
a_4	a_5	a_2	a_4	a_4	a_4
a_5	a_4	a_6	a_3	a_5	a_6
a_6	a_6	a_5	a_6	a_3	a_5

Table 11: An example for housing model

We assume here $m = n$. To explain the mechanism, we start with the example in Table 11. In the first step of the TTC mechanism, agents are endowed with a house each. Suppose the *fixed endowment* for this example is a^*: $a^*(1) = a_1, a^*(2) = a_3, a^*(3) = a_2, a^*(4) = a_4, a^*(5) = a_5, a^*(6) = a_6$.

Marriage

$\succ_{m_1}$	$\succ_{m_2}$	$\succ_{m_3}$	$\succ_{w_1}$	$\succ_{w_2}$	$\succ_{w_3}$
w_2	w_1	w_1	m_1	m_3	m_1
w_1	w_3	w_2	m_3	m_1	m_3
w_3	w_2	w_3	m_2	m_2	m_2

Table 12: Preference orderings of men and women

- Plurality Method.
  - In this method, the choice with the most first-preference votes is declared the winner. Ties are possible, and would have to be settled through some sort of run-off vote.
- In IRV, voting is done with preference ballots, and a preference schedule is generated. The choice with the least first-place votes is then eliminated from the election, and any votes for that candidate are redistributed to the voters' next choice. This continues until a choice has a majority (over 50%).

Voting theory

- Borda Count.
  - In this method, points are assigned to candidates based on their ranking ; 0 point for last choice, 1 points for second-to-last choice, and so on. The point values for all ballots are totaled, and the candidate with the largest point total is the winner.
- Copeland's Method.
  - In this method, each pair of candidates is compared, using all preferences to determine which of the two is more preferred. The more preferred candidate is awarded 1 point. If there is a tie, each candidate is awarded ½ point. After all pairwise comparisons are made, the candidate with the most points, and hence the most pairwise wins, is declared the winner.
- Kemeny-Young.
  - This method assigns a score for each possible sequence, where each sequence considers which choice might be most popular, which choice might be second-most popular, which choice might be third-most popular, and so on down to which choice might be least-popular. The sequence that has the highest score is the winning sequence, and the first choice in the

Voting theory

- In range voting, voters score or rate each option on a range, and the option with the highest total or average score wins.
- In majority judgment, similar ballots are used, but the winner is the candidate with the highest median score.
- Approval Voting . With Approval Voting, the ballot asks you to mark all choices that you find acceptable. The results are tallied, and the option with the most approval is the winner.

Criterion	Majority	Condorcet	IIA	Monotone	Consistency
Method					
Approval		No[b][c]	Yes[d]	Yes	Yes
Borda count	No	No[b]	No	Yes	Yes
Copeland	Yes	Yes	No	Yes	No[b]
IRV (AV)	Yes	No[b]	No	No	No
Kemeny–Young	Yes	Yes	No	Yes	No[b]
Majority judgment		No[b][c]	Yes	Yes	No[o]
Plura-lity/FPTP	Yes	No[b]	No	Yes	Yes
Runoff voting	Yes	No[b]	No	No	No