Décision en incertitude

Introduction

La gestion du risque dans une entreprise est multiforme. Par exemple, gérer le risque de "liquidité" consiste à anticiper et contrôler les variations de cash-flow qui résulteraient de variations d'activité. Gérer les stocks de matière procède aussi du même soucis. De la même manière, un particulier qui cherche à placer son argent fait face à des possibilités d'investissement qui comportent des risques. Ainsi, l'attitude face au risque est un des déterminants fondamentaux de la demande d'actifs financiers. Un exportateur, par exemple, qui vend en dollars un produit que ne sera payé que dans un mois court un risque de change. Si le dollar baisse il y perd, si le dollar monte il y gagne. D'une certaine manière cet exportateur est confronté à un rique. Il peut l'accepter s'il est joueur ou s'il spécule sur la hausse, il peut au contraire cehrcher à "se couvrir", c'est à dire à s'assurer un revenu donné quitte à payer ce service d'assurance.

D'une certaine manière l'exportateur ci dessus est confronté à une loterie. Une question simple qui se pose est de modéliser comment un décideur compare deux loteries. Une loterie par définition est un revenu "risqué". Comment le décideur apprécie-t-il ce risque ? Comment compare-t-il deux situations risquées. Ce chapitre est destiné à modéliser la décision en incertitude. Nous allons mettre en évidence un ensemble d'instruments simples largements utilisés dans les institutions financières pour modéliser les comportements individuels.

Un exemple

Pour comprendre l'attitude d'investisseurs face au risque, il est utile de considérer un cas d'école extrêmement simple. On considère deux loteries que l'on appelle la loterie a et la loterie b.

Dans la première loterie, a, on gagne 2 euro avev une chance sur 2, et on gagne 0 euro avec 1/2.

Dans la seconde loterie, b, on gagne avec certitude β euros.

	pile	face
a	2	0
b	β	β

Si l'on demande à un individu de choisir la loterie qu'il préfère jouer, sa réponse va dépendre évidemment à la fois de son "attitude" face au risque et de la valeur de β. Il est certain cependant que certaines valeurs de β ne posent pas de problème.

Ainsi, clairement, si $\beta = 0$, tout individu préférera jouer à la loterie a!

De même, si $\beta = 2$, tout individu choisira la loterie b!

On peut donc affirmer, par un raisonnement de continuité qu'il existe un niveau seuil $\widehat{\beta}$, a priori différent selon l'individu, tel que :

$\beta < \widehat{\beta} \Longrightarrow$ l'individu choisit a

$\beta > \widehat{\beta} \Longrightarrow$ l'individu choisit b

$\beta = \widehat{\beta} \Longrightarrow$ l'individu est indifférent

D'une certaine manière, la valeur du seuil donne une indication sur le degré de risquophobie de notre individu.

Si $\widehat{\beta}$ est très petit, notre homme préfère largement les choses sûres !

Si $\widehat{\beta}$ est très grand, il faut beaucoup d'argent pour le dissuader de jouer !

La position de $\widehat{\beta}$ par rapport à l'espérance de la loterie a, qui est égale à $E(a) = \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{2}.0 = 1$, précise les choses :

— On dira que l'individu est risquophobe si $\widehat{\beta} < 1$, risquophile si $\widehat{\beta} > 1$, et neutre au risque si $\widehat{\beta} = 1$.

Le paragraphe suivant permet de généraliser ce type d'analyse.

Espérance d'utilité

Il existe une manière relativement simple de modéliser le phénomène décrit dans l'exemple. Pour fixer les idées nous noterons $\widetilde{x}$ une loterie, c'est à dire une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé donné décrivant les gains de l'individu. Dans les illustrations simples, le nombre d'états de la nature (événements) est fini de sorte que x ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. On notera $\Omega = \{\omega\}$ l'ensemble des états de la nature, $x(\omega)$ la valeur prise par x dans l'état ω et $\pi(\omega)$ la probabilité de l'état ω.

Definition 1. *L'espérance de la variable $\widetilde{x}$ est par définition :* $\mathbb{E}(\widetilde{x}) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} \pi(\omega)x(\omega)$

Nous introduisons alors le critère dit d'espérance d'utilité :

Definition 2. *Le critère de décision vérifie l'hypothèse d'epérance d'utilité si pour toute loterie $\widetilde{x}$, il s'écrit sous la forme :* $V(\widetilde{x}) = \mathbb{E}(u(\widetilde{x})) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} \pi(\omega)u(x(\omega))$ *où u est une fonction continue croissante de $\mathbb{R}$ dans$\mathbb{R}$. qui est propre à l'individu.*
Ainsi sous cette hypothèse, le décideur préfère la lotterie $\widetilde{y}$ à la loterie $\widetilde{x}$ si et seulement si $\mathbb{E}(u(\widetilde{y})) \geq \mathbb{E}(u(\widetilde{x}))$

Le décideur évalue donc une loterie en calculant l'espérance d'une fonction donnée de ses gains. Le problème qui se pose alors est la définition de cette fonction u propre au décideur.

Prenons un individu ayant un revenu certain w_0. Proposons lui une loterie $\widetilde{x}$ d'espérance nulle. Dans un certain sens on lui de mande de "prendre un risque" au sens où (comme l'epérance de $\widetilde{x}$ est nulle, cela veut dire que x est parfois négatif, ce qui ampute w_0, soit positif ce qui améliore l'ordinaire). Notons $\widetilde{y} = w_0 + \widetilde{x}$. Clairement, l'individu est risquophobe s'il refuse de prendre ce type de risque.

Definition 3. *Le décideur est risquophobe si quel que soit $w_0 \in \mathbb{R}$, et quelle que soit la loterie d'espérance nulle $\widetilde{x}$, il refuse de prendre le risque (il préfère rester avec son revenu certain w_0) :*

$$\mathbb{E}(u(w_0 + \widetilde{x})) \leq u(w_0)$$

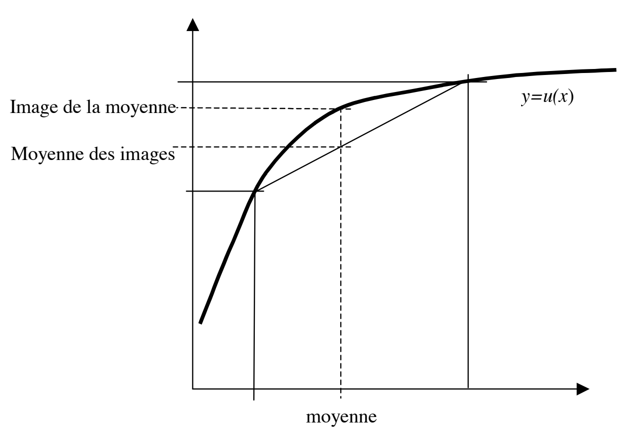
c'est-à-dire :

$$\forall \widetilde{y}, \mathbb{E}(u(\widetilde{y})) \leq u(\mathbb{E}(\widetilde{y}))$$

"l'image par u de la valeur moyenne (espérance) est plus grande que la valeur moyenne des images par u"

Cette propriété par rapport à l'opérateur espérance, ou moyenne, est une propriété de concavité de la fonction u. *En* effet, une fonction concave, par définition est une fonction telle que l'image de la moyenne est plus grande que la moyenne des images : le graphe entre deux points quelconques passe au dessus de la corde entre ces deux points.

$$\forall x_1, x_2, \forall \lambda \in [0,1], u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq \lambda u(x_1) + (1-\lambda)u(x_2)$$



Fonction concave : image de la moyenne de deux nombres, et moyenne des images de ces nombres

Bien sûr, de la même façon le décideur sera risquophile si la fonction u qu'il utilise est convexe, c'est à dire telle que la moyenne des images est supérieur à l'image de la moyenne.

Nous allons alors définir quelques concepts importants :

Definition 4. *(Equivalent certain). On appelle équivalent certain d'une loterie $\widetilde{y}$ pour un décideur u, le nombre réel $e_u(\widetilde{y})$ solution de l'équation en e :*

$$\mathbb{E}(u(\widetilde{y})) = u(e)$$

C'est la loterie sans risque équivalente à la loterie initiale.

Pour un individu risquophobe, il est facile de voir que l'équivalent certain est inférieur à l'espérance (u est croissante) :

$$u(e_u(\widetilde{y})) = \mathbb{E}(u(\widetilde{y})) \leq u(\mathbb{E}(\widetilde{y}))$$

Definition 5. *On appelle prime de risque l'écart entre espérance et équivalent certain.*

$$P_u(\widetilde{y}) = \mathbb{E}(\widetilde{y}) - e_u(\widetilde{y})$$

On voit intuitivement que plus un décideur est risquophobe c'est à dire plus la fonction u est concave plus la prime de risque est grande et plus l'équivalent certain est petit.

Definition 6. *Le décideur u est "plus risquophobe" que le décideur v si et seulement si il existe une fonction concave et croissante telle que $u = g \circ v$.*

On voit facilement que, si u est plus risquophobe que v : $\forall \widetilde{y}$, $e_u(\widetilde{y}) \leq e_v(\widetilde{y})$.(démonstration laissée à titre d'exercice).

Indice d'aversion au risque

On aimerait alors définir une sorte d'indice de risquophobie. L'idée est la suivante. Considérons une loterie donnée $\widetilde{x}$ d'epérance nulle et de variance égale à σ^2. On va alors examiner les loteries de la forme $\widetilde{y} = w_0 + t\widetilde{x}$, où t est "petit". On cherche alors une expression approximée de la prime de risque $P_u(t)$, en fonction de t. L'idée essentielle est de calculer les deux premières dérivées de P au voisinafge de 0 pour écrire :

$$P(t) \sim P(0) + tP'(0) + \frac{t^2}{2} P''(0)$$

On sait évidemment que $P(0) = 0$: quand t est nul la loterie est certaine, il n'y a pas de prime de risque.
Ecrivons ensuite la définition de la prime de risque, et différentions :

$$\mathbb{E}u(w_0 + t\widetilde{x}) = u(w_0 - P(t))$$
$$\mathbb{E}\left[\widetilde{x}u'(w_0 + t\widetilde{x})\right] = -P'(t)u'(w_0 - P(t))$$

Ce qui donne, pour $t = 0$:

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{x}\right] u'(w_0) = -P'(0)u'(w_0 - P(0))$$

Comme l'épérance de $\widetilde{x}$ est nulle, on en déduit que $P'(0) = 0$.
Différentions une nouvelle fois :

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{x}^2 u''(w_0 + t\widetilde{x})\right] = -P''(t)u'(w_0 - P(t)) + (P'(t))^2 P'(w_0 - P(t))$$

Ce qui donne pout $t = 0$:

$$\sigma^2 u''(w_0) = -P''(0)u'(w_0)$$

Proposition 7. *La prime de risque (pour de petits risques) s'écrit :*

$$P(t) = \frac{(t\sigma)^2}{2}\frac{-u''(w_0)}{u'(w_0)}$$

$$P(\widetilde{y}) = \frac{var(\widetilde{y})}{2}\left[\frac{-u''(w_0)}{u'(w_0)}\right]$$

Produit de deux termes : la moitié de la variance du risque et le quotient des dérivées secondes et premières de u.

Definition 8. *On appelle Indice d'aversion au risque :* $I_u(w_0) = \frac{-u''(w_0)}{u'(w_0)}$.

Il est assez facile de voir que plus un individu a un indice d'aversion au rique élevé, plus il est risquophobe. L'indice mesure le degré de concavité locale de u.

Fonctions u usuelles

Le paragraphe précédent peut nous aider à définir des fonctions u qu'il est "naturel" d'utiliser. Parmi celles que l'on utilise fréquemment :

Definition 9. *Fonction CARA :* $u(w) = C - e^{-\rho w}$ *dont l'indice d'aversion au risque est égal à* ρ
Fonction quadratique : $u(w) = w - \frac{1}{2k}w^2$, *définie sur [0,k] dont l'indice d'aversion au risque est égal à* $\frac{1}{k-w}$ *qui est une fonction croissante de* w.
Fonction HARA : $u(w) = \frac{1}{(1-a)}x^{(1-a)}$, $u(w) = \ln(w)$

La fonction CARA est intéressante à plus d'un titre. En particulier on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 10. *Si* $\widetilde{y}$ *suit une loi gaussienne (normale) d'espérance* m *et de variance* σ^2*, si* u *est CARA alors :*

$$E[u(\widetilde{y})] = u(m - \frac{1}{2}\rho\sigma^2)$$

C'est à dire que l'équivalent certain est $e(\widetilde{y}) = m - \frac{1}{2}\rho\sigma^2$*, et donc que l'approximation de la prime de risque calculée plus haut est ici exacte !*

Dominance stochastique, comparaison de situations risquées

Les développements précédents permettent de donner un sens à une expression très commune comme "cette décision est nettement plus risquée que telle autre".

Nous adopterons les définitions précises suivantes :

On définit d'abord la « cumulée » ou fonction de répartition :

Definition 11. $\widetilde{x}$ *étant une variable aléatoire prenant sa valeurs sur [A,B]. On appelle cumulée ou fonction de répartition la fonction définie par* $F(x) = \Pr\{\widetilde{x} \leq x\}$.

Definition 12. $\widetilde{x}$ *et* $\widetilde{y}$ *étant deux variables aléatoires prenant leurs valeurs sur [A,B] et de cumulées* F *et* G. *On dit que* $\widetilde{x}$ *est stochastiquement dominée au premier ordre par* $\widetilde{y}$ *si :*

$$\forall x \in [A, B], G(x) \leq F(x)$$

Ainsi, dans ce cas, la probabilité que $\widetilde{x}$ soit petit est plus grande que celle de $\widetilde{y}$.

Definition 13. $\widetilde{x}$ *et* $\widetilde{y}$ *étant deux variables aléatoires prenant leurs valeurs sur [A,B]. On dit que* $\widetilde{x}$ *est stochastiquement dominée au second ordre par* $\widetilde{y}$ *si tout individu risquophobe (ayant une fonction d'utilité concave croissante) préfère* $\widetilde{y}$ *à* $\widetilde{x}$.
On dit que $\widetilde{x}$ *est plus risquée que* $\widetilde{y}$ *si , de plus* $\mathbb{E}(\widetilde{x}) = \mathbb{E}(\widetilde{y})$

On considère ici des variables aléatoires à densité de sorte que :

$$F(x) = \int_A^x dF(s)$$

On a alors :

$$\mathbb{E}u(\widetilde{x}) = \int_A^B u(s)\, dF(s)$$

En intégrant par parties :

$$\mathbb{E}u(\widetilde{x}) = [u(x)\, F(x)]_A^B - \int_A^B u'(x)\, F(x)\, dx$$

Definition 14. *On appelle « bicumulée de la distribution de probabilité » la fonction définie par* $F^{(2)}(x) \equiv \int_A^x F(s)\, ds$

Remarquons que l'on a

$$F^{(2)}(B) = \int_A^B F(x)\, dx = [F(x)\, x]_A^B - \int_A^B x dF(x) = B - \mathbb{E}\widetilde{x}$$

$$\mathbb{E}u(\widetilde{x}) = [u(x)\, F(x)]_A^B - \left[u' F^{(2)}\right]_A^B + \int_A^B u''(x)\, F^{(2)}(x)\, dx$$

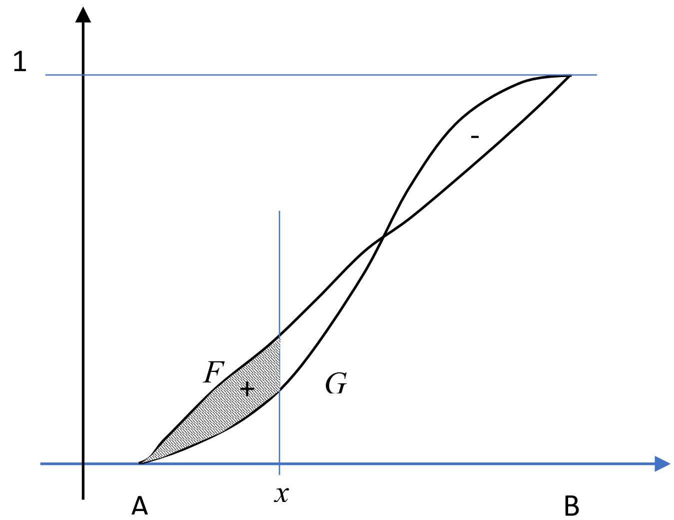
$$\mathbb{E}u(\widetilde{x}) = u(B) - u'(B)\, F^{(2)}(B) + \int_A^B u''(x)\, F^{(2)}(x)\, dx$$

$$\mathbb{E}u(\widetilde{x}) = u(B) - u'(B)\, B + u'(B)\, \mathbb{E}\widetilde{x} + \int_A^B u''(x)\, F^{(2)}(x)\, dx$$

Prenons deux variables aléatoires $\widetilde{x}$ (de densité f, de cumulée F et de bicumulée $F^{(2)}$) et $\widetilde{y}$ (g, G, $G^{(2)}$) . Dire que pour toute fonction u concave croissante (c'est à dire pour toute fonction u u'' négative, u'

$$\mathbb{E}(\widetilde{x}) \leq \mathbb{E}(\widetilde{y})$$
$$et$$
$$\forall x F^{(2)}(x) \geq G^{(2)}(x)$$

Definition 15. *Quand $\widetilde{x}$ est plus risquée que $\widetilde{y}$on dit que $\widetilde{x}$ est un étalement de $\widetilde{y}$ à moyenne constante. Dans ce cas on a :*$E(\widetilde{x}) = E(\widetilde{y})$ *et* $\forall s \int_A^s F(x)dx \geq \int_A^s G(x)dx$



Fonctions de répartition : $\widetilde{x}$ est plus risquée que $\widetilde{y}$ si la surface séparant les deux courbes est toujours positive

On peut montrer le résultat suivant :

Proposition 16. *$\widetilde{x}$ est plus risquée que $\widetilde{y}$ si et seulement si on peut passer de la distribution de probabilité de $\widetilde{x}$ à la distibution de probabilité de $\widetilde{y}$, en « dispersant » de la masse, c'est-à-dire en diminuant la probabilité d'un segment tout en augmentant la probabilité à l'extérieur (en maintenant l'espérance constante).*