ECONOMIE : RISQUE ET TEMPS, INTRODUCTION À LA FINANCE

Dominique HENRIET
Ecole Centrale Marseille

11 septembre 2018

2° ANNEE : APPROFONDISSEMENT M.I.E

INTRODUCTION

La plupart des décisions économiques (dans une entreprise ou même dans la vie privée) sont telles qu'il y a rarement coïncidence temporelle entre dépenses et recettes. Par exemple, un industriel doit d'abord investir dans l'outil de production avant de pouvoir produire, puis vendre, puis encaisser le produit des ventes. Ce décalage est d'autant plus important pour les grands projets nécessitant un ensemble d'activités préalables diverses, de dépenses initiales importantes, de délais de productions longs. De manière générale, ce décalage temporel s'accompagne le plus souvent d'aléa : il peut y avoir incertitude sur les approvisionnements, sur les cours des matières premières, sur l'intensité de la demande ou sur les prix.. Par exemple, un exportateur qui vend un produit à l'étranger est en général payé en dollars deux ou trois mois après la livraison ! Sa recette en euro est de ce fait aléatoire et dépendra du cours du dollar à cette date future, alors que sa dépense, elle, est certaine et immédiate. Pour résumer, une décision économique d'investissement s'apparente, toutes proportions gardées, à un pari : la mise est certaine, le gain est aléatoire et plus ou moins différé dans le temps. Il se peut bien sûr que le décalage soit dans l'autre sens : on peut avoir des recettes certaines aujourd'hui, mais des dépenses aléatoires demain. C'est le cas par exemple des salariés qui bénéficient pendant leur vie active de rentrées d'argent "certaines", mais dont l'avenir est incertain (retraite, maladie chômage...).

Pour résumer, l'activité économique est ainsi faite que les recettes et dépenses associées à une activité économique sont tout à la fois décalées dans le temps et incertaines ! Les marchés financiers, les institutions financières, les contrats financiers sont des instruments qui permettent de résoudre ce défaut de coïncidence. La finance est l'ensemble des activités qui rendent possible le transfert de richesses dans le temps et l'échange de risques.

Pour comprendre le rôle de ces dispositifs, il est éclairant de donner quelques "exemples stylisés" totalement imaginaires mais qui ont l'avantage de faire comprendre les mécanismes élémentaires en jeu.

Intuitions

Pourquoi ne pas tuer les vieux à la naissance ?

Sur une planète imaginaire les autochtones ne vivent que deux jours. Le premier ils sont jeunes (et fringants) le second ils sont vieux. A la fin de chaque journée, chaque jeune met au monde un "enfant". Cet effort incomparable le fait alors basculer dans la vieillesse. La population de cette planète est donc constante, constituée pour moitié de jeunes alertes et pour moitié de vieux invalides. Les habitants de cette planète se nourissent de glouttes (fruits verts très savoureux) qui poussent sur des arbres dont les feuilles sont rouges. Les jeunes sont assez "agiles" pour cueillir des glouttes alors que les vieux n'ont plus la santé pour le faire. Chaque jeune dispose ainsi de q_0 glouttes (qui ne se conservent malheureusement pas plus d'une journée).

L'état initial est donc le suivant : à chaque période le jeune consomme ses glouttes et le vieux ne consomme rien. La période d'après le jeune devient vieux et ne mange plus rien, son "fils" profitant, lui de la vie. A priori, comme les glouttes ne se conservent pas, il est impossible pour un jeune de faire des économies pour sa vieillesse. Pourtant, l'introduction d'instruments financiers permet d'améliorer la situation.

On peut adopter deux points de vue différents : le point de vue de chaque individu et le point de vue global.

— Pour chaque individu, la situation est claire : il a de quoi vivre à la première période et plus rien à la seconde. Chaque individu a ainsi un excès de ressources à la première période de sa vie et un défaut à la seconde. Tout seul, il est dans l'incapacité de répartir sa richesse sur deux périodes : les glouttes ne se conservent pas !

— Du point de vue global la situation est moins catastrophique : à chaque période vivent deux catégories d'individus : ceux qui ont des ressources excédentaires et qui "aimeraient bien" pouvoir se nourrir quand il seront vieux et ceux qui n'ont aucune ressource (mais qui en ont eu quand ils étaient jeunes). Les jeunes sont prêts à donner une partie de leurs glouttes contre la promesse d'en avoir quand ils seront vieux !

Il est naturel d'introduire un actif financier : cet actif est un "contrat" qui stipule que son détenteur a droit à "une gloutte" en l'échange d'un “papier”. Les jeunes ont intérêt à acheter ce papier (il leur permettra d'avoir une gloutte plus tard, les vieux ont intérêt à le vendre contre des glouttes !).

Quand le bonheur des uns fait le malheur des autres (et réciproquement)

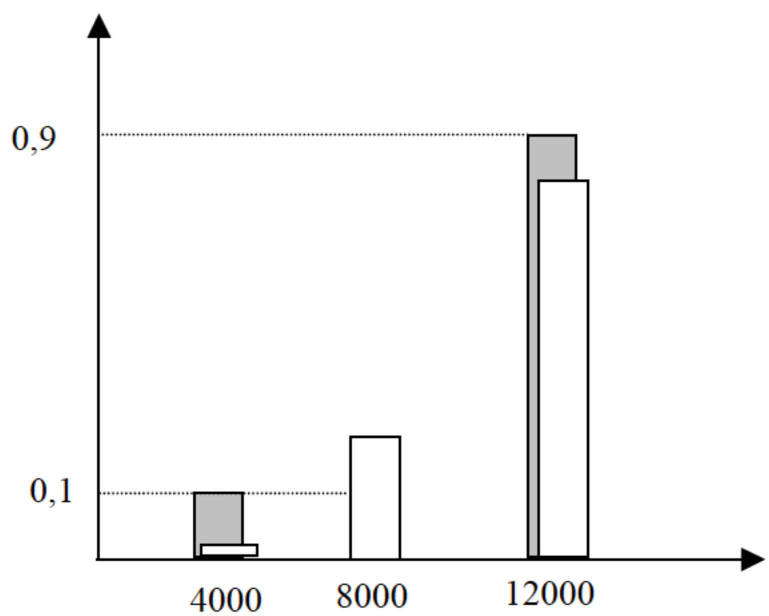
Sur une île exotique, que nous nommerons Fébooupa„ le régime météo est ainsi fait que quand il fait beau sur la côte Est (E) il fait mauvais sur la côte Ouest (W) et vice versa. Evidemment le temps qu'il fera est aléatoire. A chaque saison touristique, soit il fait beau à l'Ouest (et il fait mauvais à l'Est) et les activités touristiques de l'Ouest sont florissantes (à l'Est, au contraire, les affaires sont mauvaises), soit c'est inverse.

Nous sommes ici en présence d'un "pur aléa" : les ressources de chacun des deux côtés de l'île sont aléatoires. Là aussi deux points de vue sont possibles : du point de vue de chaque individu sa ressource est aléatoire et "il n'y a rien à faire". Du point de vue global les choses sont moins risquées : quand l'un a des ressources l'autre n'en a pas et réciproquement.

On voit alors que l'on peut "atténuer" le risque subi par chacun des côtés : la ressource totale (la somme des ressources de l'Est et de l'Ouest) n'est pas aléatoire ! L'introduction d'actifs financiers permet d'améliorer la situation . Une compagnie d'assurance peut par exemple proposer un contrat d'assurance qui indemnise en cas de mauvaise météo. Une autre façon de faire consiste à introduire chacune des deux sociétés en bourse : Le côté Ouest prenant alors des participations dans le côté Est et réciproquement (participations croisées).Il est clair qu'un contrat financier entre les deux côtés de l'île permet d'atténuer et même de supprimer complétement l'aléa ! Il y a même plusieurs types de contrats qui permettent de le faire : un contrat d'assurance ou un échange d'actions.

Une histoire d'oeufs et de paniers bien connue, sauf qu'il s'agit de bateaux

Bernoulli (Daniel), fameux mahématicien suisse a écrit en 1738 un article (en latin !) "sur une nouvelle théorie de la mesure du risque" (*specimen theoriae novae de mensura sortis*) dans lequel il raconte l'histoire d'un certain Sempronius, sorte de négociant international. Voici ce qu'écrit Bernoulli (traduit en français) : "Sempronius détient chez lui 4000 ducats et, de plus, possède, à l'étranger 8000 ducats de marchandises qui ne peuvent être rapatriées que par bateau. Il se trouve cependant qu'un bateau a une chance sur dix de sombrer pendant le voyage". Dans un langage d'aujourd'hui, on dirait que Sempronius est exposé à un risque sur sa richesse. La loterie a laquelle il est exposé peut être représentée par le vecteur $((4000, p = 0.1), (12000, 1 - p = 0.9))$ et représentée graphiquement par la distribution grise.



En espérance, sa richesse est égale à $4000 + 0.9 \times 8000 + 0.1 \times 0 = 11200$ ducats.

Sempronius a alors une idée géniale : au lieu de ne prendre qu'un seul bateau il répartit sa richesse sur deux. En supposant que les bateaux suivent des routes également dangereuses mais indépendantes, il perdra les 8000 ducats si les deux bateaux font naufrage, 4000 si l'un des deux seulement sombre, 0 si les deux arrivent à bon port. La loterie.(sa richesse finale) devient alors $((4000, 0,01 = p^2), (8000, 0,18 = 2p(1-p)), (12000, 0,81 = (1-p)^2))$ représentée par la distribution blanche. En espérance Sempronius ne gagne ni ne perd, mais on a l'intution que le risque auquel sa fortune est exposée a diminué : la probabilité des événements extrèmes a diminué au profit de l'augmentation d'un événement intermédiaire. Ce type de phénomène est central en économie de l'incertain et nous verrons comment le généraliser.

Comment partager entre les parties prenantes (stakeholders) d'un même projet ?

Bill a un projet fondé sur ce que lui même qualifie être une idée de génie. Bien sûr, selon lui la rentabilité de ce projet est exceptionnelle ! Evidemment, Bill n'a pas l'argent nécessaire à la mise initiale ! Maurice, lui dispose d'une quantité d'argent dont il ne sait pas quoi faire. A priori les deux amis sont fait pour s'entendre. Mais une question fondamentale se pose : comment doit-on prévoir de partager "le résultat" entre Bill et Maurice ? Le contrat de collaboration initial (financement et rémunération des acteurs) peut-il avoir une influence sur le résultat lui même ? Cette influence dépend elle de l'information dont dispose maurice sur le projet de Bill ?

Prenons un exemple simple : un propriétaire terrien (qui ne sait rien faire de ses mains) et un travailleur agricole (qui ne possède pas de terre) sont a priori faits pour s'entendre. On sent bien cependant que le contrat qui les lie peut avoir une incidence sur les résultats, sur la taille du gâteau (les produits de la récolte), qu'ils vont se partager. Par exemple si le propriétaire donne un salaire fixe au travailleur, celui-ci n'a pas beaucoup d'incitation à augmenter la production. Si au contraire, le travailleur loue la terre, et donne ainsi un loyer fixe au propriétaire, il aura toutes les incitations à développer au maximum la production. Evidemment, dans ce dernier cas, le risque (par exemple dû à la metéo) est intégralement supporté par le travailleur, alors que le revenu du propriétaire est totalement assuré !.

Finance de marché et finance d'entreprise

On a l'habitude de distinguer deux branches distinctes dans la finance. La finance de marché et la finance d'entreprise. La finance de marché a pour objectif de proposer des modèles qui permettent d'évaluer les actifs financiers. Etant donnés les caractéristiques de tel ou tel actif est-il possible de proposer des modèles qui permettent de "prédire" son prix ou de donner une formule d'évaluation ? La finance de marché repose essentiellement sur la modélisation de l'offre et de la demande d'actifs dans un contexte aléatoire. La finance d'entreprise (corporate finance) analyse les problèmes associés au financement de l'entreprise. En particulier, le problème crucial qui se pose est la séparation entre "contrôle" et "financement" : ceux qui financent l'entreprise (les créanciers), qu'ils soient actionnaires ou prêteurs, ne sont pas ceux qui prennent les décisions. Il en résulte des problèmes d'incitation (comment faire en sorte que le management prenne des décisions en ligne avec les intérêts des actionnaires) de rationnement du crédit, de structuration du bilan.

La finance de marché repose essentiellement sur la modélisation de l'offre et de la demande de titres. Elle suppose un comportement rationnel des investisseurs qui cherchent à optimiser leurs revenus.

La finance d'entreprise analyse les problèmes d'incitation associés au financement des activités économiques.

Annexe 1 marchés financiers

Toute activité économique s'inscrit dans un cadre intertemporel et risqué. Intertemporel au sens où les recettes d'un projet sont souvent différées par rapport aux dépenses. Risqué, car souvent, les revenus associés sont aléatoires. Par exemple, une source de risque bien connue tient à la fluctuation des prix des biens. Un exploitant agricole qui ensemence ses terrains, n'encaissera la recette que plus tard, au moment de la récolte. Même plus, il ne sait pas à quel prix il pourra écouler sa production dont le volume, lui-même, est soumis à l'aléa climatique. De la même manière un exportateur est soumis aux flutuations des devises dans lesquels sont facturés ses produits. Ces agents économiques sont ainsi "exposés" à un profil de ressources et de dépenses, profil "déséquilibré" dans le sens où à certaines périodes il y a dépenses, à d'autres il y a recettes, et que celles ci, recettes et dépenses sont assujéties à être différentes selon l'état de la nature. On parle de "position", l'état initial du profil de recettes et dépenses. Un agent économique qui veut "lisser son profil", éviter les hauts et les bas, cherchera à acheter sur le marché financier un "profil complémentaire" qui augmente les recettes nettes quant elles sont basses et qui les diminue quand elles sont hautes. On voit ainsi qu'un "actif financier", au moins du point de vue théorique, n'est rien d'autre qu'un "profil" de recettes et de dépenses. Le marché financier est alors le lieu où s'échangent ces profils.

Le marché à terme d'un produit agricole par exemple est un marché sur lequel on fixe aujourd'hui le prix auquel on pourra vendre sa récolte demain. Ce prix fixé à l'avance n'est bien sûr pas celui qui prévaudra, au comptant. Un tel produit fiancier permet à l'exploitant agricole de se prémunir contre la varaition des cours. Les gouvernements, ou les entreprises ont des besoins de capitaux pour financer certains projets. Ils émettent des emprunts c'est-à-dire des contrats qui spécifient des flux financiers. Ces contrats, qu'on appelle obligations, sont typiquement des profils "intertemporels" d'encaissement et de décaissements. Alternativement, elles peuvent émettre des actions qui, elles donnent droit à des payments futurs aléatoires. Théoriquement, donc, un produit financier est un "papier" qui spécifie des flux (encaissements ou décaissements) futurs et aléatoires qui bénéficient à celui qui détient ce papier.

Lorsque ces papiers peuvent être échangés sur un marché à un certain prix on a ce que l'on appelle un marché financier.

Le marché obligataire, par exemple, (ou monétaire, quand il s'agit de court terme) est le lieu où s'échangent les obigations. Une action, c'est à dire un droit de propriété d'une entreprise, est un profil qui spécifie des recettes aléatoires (les dividendes, c'est-à-dire les profits de l'entreprise), elle s'échange sur le marché des actions.

A partir de ces actifs financiers, on peut définir des actifs dérivés, c'est à fire des actifs dont le "profil" (aléatoire ou intertemporel) est défini en fonction du profil d'un autre actif.

La finance de marché a pour objectif de comprendre comment les prix de ces différents actifs financiers sont déterminés. Comme tous ces marchés ne sont pas indépendants (par exemple les produits dérivés sont défini en fonction d'un autre actif), les prix de ces différents actifs sont liés, au moins théoriquement, entre eux. Ces relations traduisent le fait que deux actifs qui procurent le même profil ont nécessarement le même prix, sinon il y aurait ce que l'on appelle des opportunités d'arbitrage.

Institutions et instruments

Les acteurs

Les acteurs traditionnels du monde de la finance sont évidemment les banques. Depuis quelques décennies sont apparus de nouveaux acteurs sur les marchés financiers :les "fonds".

Les fonds sont des institutions chargées de gérer, en les investissant, les capitaux apportés par des investisseurs, des épargnants ou d'autres institutions. On peut citer :

— les fonds de pension ou de retraite (épargne des actifs)
— les mutual funds,
— les hedge funds (fonds spéculatifs)
— sovereign-wealth funds (fonds souverains)

A ces acteurs il convient de rajouter les compagnies d'assurance qui interviennent de plus en plus sur les marchés.

Les acteurs les plus influents sur les places financières sont les banques. En France, la loi bancaire de 1984 a permis l'affirmation définitive des banques universelles.

On distingue cinq métiers principaux qui caractérisent aujourd'hui les banques généralistes :

1. la banque de détail, ou retail, collectant les capitaux auprès de clients particuliers. Les filiales banques privées en sont des cas particuliers spécialisés pour des clients ayant de grosses capacités de financement.
2. la gestion d'actifs, ou Asset Management, AM, gérant des capitaux pour compte de tiers.

3. La Banque de Financement et d'Investissement (BFI), ou Corporate and Investment Banking regroupant trois missions principales :
   — le financement de projets,
   — le conseil en fusions et acquisitions,
   — le développement de produits financiers complexes et le trading pour compte propre sur les marchés de capitaux. C'est dans sur dernière branche que se situent les salles de marché développant des stratégies et produits financiers complexes, dits exotiques,
   — les services financiers, concernant le crédit à la consommation, les cartes de paiement, etc,
   — les services d'assurance, comprenant les portefeuilles d'assurance-vie, les contrats d'assurance-décès, accidents, habitation.

Organisation d'une salle de marché

Elle est séparée d'une part en type de produits financiers traités : actions, obligations, matières premières, monétaire, crédit (voir section suivante).

Quatre lieux de décisions se distinguent :

— le front-office directement relié aux marchés de capitaux. Y interviennent : vendeurs ou sales, structureurs développant les produits financiers complexes, traders, quants, élaborant les modèles d'évaluation des produits financiers, analystes,

— le middle-office, garantissant la bonne tenue des opérations réalisées par les traders via l'enregistrement dans les systèmes d'information,

— le back-office assurant la comptabilité, le paiement des opérations des traders, le contrôle des risques auditant les risques pris par les traders et vérifiant leurs transactions pour éviter toute erreur d'évaluation et fraude.

Les instruments

Deux instruments fondamentaux permettent aux entreprises de lever des fonds sur les marchés financiers : les actions et les obligations.

Actions

Une action est un titre de propriété représentant une fraction du capital d'une société. Nous pouvons distinguer pour un actionnaire ses droits économiques de ses droits juridiques. Les droitsroits économiques sont :

— Le droit au dividende : le solde bénéficiaire des comptes annuels d'une entreprise, égal aux recettes auxquelles on soustrait les charges, est réparti entre les réserves de la société, servant à son autofinancement, et les dividendes, affectés aux actionnaires.

— Le droit sur l'actif social : les actionnaires ont un droit proportionnel à la quantité d'actions qu'ils possèdent sur le patrimoine de l'entreprise, déduction faite des dettes. Ainsi, lors d'une augmentation de capital, les actionnaires ont une priorité sur les actions nouvellement émises.

Pour les droits juridiques on citera :

— Le droit à l'information : ils ont accès à tous les documents relatifs à l'activité et aux résultats de la société.

— Le droit de vote, permettant lors de l'assemblée générale annuelle de fixer les dividendes, prendre des décisions de gestion, délibérer sur les comptes de la société.

— Le droit d'exercer en justice : les actionnaires mécontents de la gouvernance de l'entreprise peuvent poursuivre les administrateurs en justice.

Les obligations

Les obligations sont des titres de dette pour les entreprises et de créances pour les souscripteurs.

Les obligations sont émises sur un marché primaire. La société s'engage à rembourser le capital emprunté à une échéance déterminée et à verser un intérêt annuel.

Une obligation est caractérisée par :

1. la valeur nominale ou faciale N définie à l'émission et à partir de laquelle sont calculés les intérêts ou coupons versés,
2. la maturité définissant la date finale de l'emprunt obligataire,
3. la valeur d'émission qui peut être égale à la valeur nominale (au pair), ou non (prime à l'émission),
4. le taux nominal qui détermine la valeur du coupon $d = r_0 V$et donc le revenu de l'obligation. Il peut être fixe ou variable,

Dérivés

Contrats à terme Une opération à terme est une opération au comptant différée dans le temps. L'acheteur et le vendeur se mettent d'accord sur les conditions d'un échange, qui s'effectuera à une date future (maturité) précisée par le contrat à terme. L'échange est irrévocable. Le prix de l'échange est fixé à la date d'élaboration du contrat mais l'échange n'est effectif qu'à la maturité. Nous verrons que le prix fixé aujourd'hui et correspondant au montant échangé à maturité d'un contrat à terme peut être calculé sans modélisation du cours du sous-jacent.

Options négociables Les options négociables sont des contrats permettant (il n'y a pas obligation) à son détenteur d'acheter (call) ou de vendre (put) une certaine quantité de biens à un cours fixé à la signature du contrat, appelé prix d'exercice (strike) K à la date T, maturité de l'option (cas des options européennes) ou jusqu'à T (cas des options américaines). Nous verrons dans ce cours les modèles qui permettent de calculer le prix de ce type de produit.

Première partie

TEMPS ET INTERETÊT

Transfert dans le temps

Le taux d'intérêt

Du point de vue d'aujourd'hui (date t), avoir un euro immédiatement est plus intéressant que l'avoir plus tard ($t+1$). Un euro disponible aujourd'hui permet d'acheter au moins autant. Un euro disponible plus tard a ainsi nécessairement une valeur inférieure à 1 aujourd'hui. Si on donne le choix (aujourd'hui) entre un euro immédiatement ou un euro plus tard, il est certain que la préférence va à un euro immédiatement. Considérons alors un actif qui rapporte 1 euro à la date $t+1$. Son prix $B(t)$ à la date t est donc nécessairement inférieur à 1. Il est équivalent de dire qu'un euro aujourd'hui permet d'avoir $\frac{1}{B}$ euros demain. Ainsi, on appelle taux dintérêt entre deux dates t et $t+1$, le supplément qu'il est possible d'obtenir en $t+1$ en renonçant une unité en t. On a donc

$$r(t) = \frac{1}{B(t)} - 1 \Longleftrightarrow B(t) = \frac{1}{1+r(t)}$$

Considérons alors un actif qui rapporte un revenu $d(t+1)$, connu, à la date $t+1$. Son prix à la date t est donc nécessairement égal à $\frac{d(t+1)}{1+r(t)}$.

Plus généralement, imaginons que le taux d'intérêt $r(t)$ entre $t$et $t+1$ reste constant (égal à r) entre $t=0$ et $t=T-1$. On obtient que le prix d'un actif qui rapporte une séquence de revenus $d(t)$ aux dates $t=1,...,T$ est nécessairement égal à :

$$p(0) = \sum_{t=1}^{T} \frac{d(t)}{(1+r)^t}$$

Expression qu'on appelle “valeur actualisée au taux r “ de la séquence de revenus $d(t)$.

Dans ce premier chapitre nous allons généraliser ce type de formule et nous introduirons les principales notions concernant les obligations. Les principes élémentaires de la notion d'arbitrage y sont décrits. Une application simple aux marchés dérivés y est présentée.

Généralisation : les obligations

Une obligation est un titre adossé à un emprunt émis par une entreprise ou un gouvernement. Ce titre est une promesse de versements échelonnés dans le temps. Cet actif financier peut être échangé sur le marché. Par exemple, un particulier qui a acheté un emprunt d'Etat, peut le revendre sur le marché à tout instant : il échange des recettes échelonnées dans le futur (le remboursement de l'emprunt par l'Etat) contre une recette immédiate (le prix de vente de l'obligation). Selon le "terme" c'est à dire l'horizon des titres échangés, on parlera du marché obligataire (de quelques mois à plusieurs années) ou du marché monétaire (du jour à quelques mois).

A priori il existe de multiples formes d'obligations. Nous considérons ici les obligation à revenus fixes. Pour celle-ci il n'y a aucun aléa sur les montants des échéances qui sont fixées dès le début du contrat. Le seul risque éventuel est le défaut de l'emprunteur qui pourrait ne plus être en mesure d'honorer les engagements. Ce risque (que l'on appelle risque de signature) sera abordé dans la fin du cours où nous examinerons les problèmes spécifiques au financement de l'entreprise.

Dans un premier temps, nous nous plaçons à une date donnée (aujourd'hui), la date 0, et considérons des obligations qui spécifient des flux futurs. Ainsi nous examinons le marché à la date 0 de produits qui spécifient des flux futurs. Nous nous plaçons d'abord dans un environnement discret dons les dates sont $t=0,1,2...$

Definition 1. *Une obligation d à la date 0 est définie par les versements $d(t)$ qu'elle procure à chaque date t (future) et son prix p à la date 0. $d = (d(1), d(2).....d(t)...)$*

$T = \max(t,\ d(t) \neq 0)$ est appelée maturité de l'obligation. Si $T = +\infty$, d est appelée rente perpétuelle.

En général les $d(t)$ sont positifs, mais rien n'empêche qu'il ne soient quelconques. Il existe cependant des profils type que nous décrivons brièvement ici :

Definition 2. *- Obligations in fine (standard à taux fixe) : $\forall t < T$ $d(t) = c$, $d(T) = c + N$, où N est appelée "valeur faciale"., c le coupon et $r \equiv c/N$ est le "taux d'intérêt nominal" de l'obligation. Cette obligation est proportionnelle à $(r, r, ...r, ...(1 + r))$.Lorsque l'emprunteur émet l'obligation et que $p = N$ on dit qu'elle est émise au pair.*

- Obligations à annuités constantes : $d(t) = a$ (proportionnelle à $(1, 1, ..., 1)$)

- Obligation à "zéro-coupon" de maturité T notée δ_T : $\forall t < T$ $\delta_T(t) = 0$, $\delta_T(T) = 1$: $(0, 0, ..., 0, 1)$.

Il est clair que le prix de ces obligations dépend de l'offre et de la demande de ces actifs. Cependant, on peut faire quelques remarques de bon sens sur des relations nécessaires que doivent vérifier les prix de ces actifs.

— Remarque 1 : si d_1 et d_2 sont deux obligations dont les prix (à la date 0) sont p_1 et p_2. L'obligation qui procure les revenus $d(t) \equiv d_1(t) +\ d_2(t)$ doit avoir comme prix $p = p_1 + p_2$.

— Remarque 2 : l'obligation qui rapporte $\lambda d(t)$ doit avoir le prix λp

Ces remarques sont moins évidentes qu'il n'y paraît. Elles reposent sur un raisonnement que l'on appelle raisonnement d'arbitrage. Supposons par exemple, par l'absurde, que $p > p_1 + p_2$. Un investisseur pourrait acheter les obligations d_1 et d_2 et revendre immédiatement l'obligation qui procure $d_1(t) +\ d_2(t)$ en faisant un bénéfice immédiat et potentiellement infini ! L'idée essentielle des modèles d'évaluation des actifs financiers repose sur l'hypothèse qu'il ne peut y avoir d'opportunité d'arbitrage (c'est à dire de gain immédiat sans prise de risque en combinant des opérations d'achat et de vente).

Ces hypothèses impliquent que le prix des obligations doit être une forme linéaire du vecteur des versements. L'expression de cette forme linéaire est simple dès lors qu'on connaît le prix des obligations à zéro coupon qui constituent une base canonique de l'ensemble des obligations. En effet n'importe quelle obligation est une combinaison linéaire (triviale) d'obligations zéro-coupon. $d = \sum_{t=1}^{\infty} d(t)\delta_t$

Notation 3. *On note $B(0, t)$ le prix (à la date 0) de l'obligation zéro coupon de maturité t : $\delta_t = (0, 0, ...0, 1, 0, 0, 0)$*

Proposition 4. *Si toutes les obligations zéro coupon de maturités entre 0 et $T_{\max}$ sont disponibes et cotées sur le marché, alors l'absence d'opportunité d'arbitrage implique que le prix d'une obligation quelconque de maturié inférieure à $T_{\max}$, $p\,(0, d)$, est égal à la "valeur actualisée" de ses versements. Le facteur d'actualisation est égal au prix de l'obligation zéro coupon correspondante. $p\,(0, d) = \sum_{t=1}^{T_{\max}} B(0, t)d(t)$*

Zéro-coupons, courbe des taux

Sur une période, le prix d'une obligation zéro coupon de maturité 1, par définition du taux d'intérêt entre 0 et 1, $R\,(0, 1)$ vérifie : $B(0, 1) \equiv \frac{1}{1+R(0,1)}$.

Courbe des taux

A la date s étant donné l'ensemble des prix $(B(s, 1), .., B(s, t)...)$ des zéro coupons. On définit la courbe des taux comme les taux par unité de temps, $R(s, T)$ en fonction de la maturité T :

Definition 5. *Etant donnés les prix $B(s, s + T)$, par définition, la courbe des taux à la date s est la fonction $T \to R(s, T)$ définie par :*

$$B(s, s + T) = \frac{1}{(1 + R(s, T))^T}$$

$R(s,T)$ est donc égal à.

$$R(s,T)=\left(\frac{1}{B(s,s+T)}\right)^{1/T}-1$$

Ainsi en plaçant un euro à la date s sur une obligation zéro coupon d'échéance $s+T$ (c'est à dire de maturité T) on obtient $(1+R(s,T))^{T}$ euros à la date $s+T$. Tout se passe comme si l'euro avait été placé sur un actif qui rapporte un intérêt de $R(s,T)$ par période.

La monotonie de $T\rightarrow R(s,T)$ est très variable, on peut tout aussi bien avoir $R(s,.)$ croissante ou décroissante.
Le passage de $R(s,T)$ à $R(s+1,T)$ est appelé "évolution de la courbe des taux".

Détermination des zéro-coupons

Dans la vie réelle il n'existe pas de zéro coupon de telle sorte qu'il n'est pas directement possible d'observer les prix élémentaires $B(s,t)$.
En général on parvient à estimer ces prix en opérant des régressions multiples sur les produit existants.
Supposons que l'on ait K obligations disponibles sur une maturité T. On a :

$$p\left(s,d_{k}\right)=\sum_{t=1}^{T}B(s,s+t)d_{k}(s+t)$$

En régressant $p\left(s,.\right)$ sur les $d_{k}\left(.\right)$, on déduit des estimateurs de B.

Univers déterministe

Supposons que l'économie soit sans aléa. A la date 0 $B(0,1)$ est le prix de l'obligation zéro coupon sur une période, $B(0,2)$ le prix de celle de maturité 2.A la date 1, la nouvelle obligation zero coupon de maturité 1 qui rapportera 1 à la date 2 coûtera $B(1,2)$, (valeur connue dès la date 0, s'il n'y a pas d'incertitude!) à la date 1. A la date 0 on peut alors obtenir 1 euro à la date 2 de deux manières : la première consiste à acheter une obligation zéro coupon de maturité 2 (cela coûte $B(0,2)$). La deuxième façon consiste à prévoir d'acheter à la date 1 une obligation qui coutera $B(1,2)$à la date 1. Pour avoir cette somme il faut acheter $B(1,2)$ obligations zero coupon de maturité 1 à la date 0 ce qui coute $B(0,1)B(1,2)$.On a donc, en univers déterministe :

$$B(0,2)=B(0,1)B(1,2)$$

Plus généralement on a donc :

$$B\left(s,t\right)=\prod_{u=s}^{t-1}B(u,u+1)=\prod_{u=s}^{t-1}\frac{1}{1+R\left(u,1\right)}$$

On voit ainsi que la donnée de l'évolution des taux courts $R\left(u,1\right)$ (que l'on note $r\left(u\right)$) permet de calculer le prix des obligations à n'importe quelle date.

Par exemple, pour une obligation qui rapporte $d\left(t\right)$, $t\leq s+T$, le prix à la date $s$est :

$$p\left(s,d\right)=\sum_{t=s+1}^{s+T}\left[\prod_{u=s}^{t-1}\frac{1}{1+r\left(u\right)}\right]d\left(t\right)$$

Le cas stationnaire, formue d'actualisation

Si l'économie stationnaire au sens où $R(s,1)$ est constant égal à r, le taux d'intérêt de court terme ne varie pas. On a alors $B(s,t)=\frac{1}{(1+r)^{t-s}}$. En réécrivant la formule générale

Proposition 6. *Dans un monde stationnaire sans aléa le prix à la date sde n'importe quelle obligation de maturité finie s'exprime comme la valeur actualisée (VA) de ses versements :*

$$p(s,d)=\sum_{t=s+1}^{s+T}\frac{d(t)}{(1+r)^{t-s}}$$

Taux actuariel, (ou taux de rentabilité interne)

Réciproquement, on peut définir le taux implicite d'une obligation, comme le taux constant qui soutient son prix.

Definition 7. *On appelle taux actuariel ou taux de rentabilité interne (TRI) d'une obligation dont le prix à la date 0 est* p *et les versements futurs* $d(t)$ *(où* $d(t)\geq 0$*) l'unique solution en* r *de l'équation* $p=\sum_{t=1}^{T}\frac{d(t)}{(1+r)^t}$.

Lorsque l'on introduit l'aléa, les prix $B(s,t)$ ne sont pas connus avant la date s. Cependant l'analyse qui précède nous permet de définir le concept de taux à terme.

Contrat à terme

L'analyse qui précède est un instrument puissant pour évaluer ce que l'on appelle les contrats à terme.

Definition 8. *Marché à terme. On parle de marché à terme lorsque les conditions de transaction sur les flux futurs sont décidés à l'avance : on décide à la date 0 (sans encaissements ni décaissements à cette date) d'opérer une transaction dans le futur, le prix de cette transaction étant fixé à la date 0.*

Taux forward

Supposons qu'un investisseur achète une obligation à zéro coupon de maturité $t+1$. Il paye aujourd'hui $B(0,t+1)$. Simultanément il peut emprunter la somme $B(0,t+1)$ à échéance t. A la date 0 les flux sont équilibrés. A la date t, l'investisseur doit payer $B(0,t+1)/B(0,t)$, (en effet,l'émetteur d'une obligation zéro coupon de maturité t rembourse 1 à l'échéance contre $B(0,t)$ aujourd'hui).

— Les flux sont les suivants : un décaissement égal à $B(0,t+1)/B(0,t)$ à la date t et un encaissement de 1 à la date $t+1$. Ces flux sont ceux d'un "projet d'obligation zéro coupon" de maturité 1 mais à la date future t. Aucun paiement n'a lieu aujourd'hui.

Definition 9. *On appelle zero coupon "forward" de maturité 1 (court terme) à la date t un actif qui prévoit aujourd'hui de prêter à la date t pour une période. Le profil est :* $(0,0,...,-\frac{1}{1+f(0,t,1)},1,0,0..)$, *dont la valeur à la date 0 est nulle (* $-\frac{1}{1+f(0,t,1)}B(0,t)+B(0,t+1)=0$*). Il en résulte nécessairement :*

$$\frac{1}{1+f(0,t,1)}=\frac{B(0,t+1)}{B(0,t)}=\frac{(1+R(0,t))^t}{(1+R(0,t+1))^{t+1}}$$

On appelle $f(0,t)$ *le taux forward, à terme. A cette date t là, l'obligation zéro coupon d'échéance 1 vaudra* $B(t,t+1)$ *au comptatnt, qui n'est égal à* $\frac{B(0,t+1)}{B(0,t)}$ *qu'en univers déterministe.*

Ce type d'instrument financier dérivé, permet de se protéger contre des variations de taux d'intérêt à court terme. Si je sais que je vais devoir emprunter dans six mois je peux acheter ce genre de contrat à terme si je redoute que le taux d'intérêt à une période à cette date devienne supérieur à $f_0(t)$.

De même, il peut attirer les "spéculateurs". Acheter un zéro coupon forward correspond à un décaissement de $\frac{B(0,t+1)}{B(0,t)}$ à la date t. Au comptant, le même flux de 1 à la date $t+1$ coûte à cette date $B(t,t+1)$ Cette opération qui conduit à un gain de $B(t,t+1)-\frac{B(0,t+1)}{B(0,t)}$ à la date t, n'est profitable à un spéculateur que si $B(0,t)B(t,t+1)\geq B(0,t+1)$. c'est à dire si le taux d'intérêt de court terme baisse.

Annexe 2 : forwards et futures

Les forwards et les futures sont des marchés à terme : on convient à la date 0 (aujourd'hui) d'acheter (ou de vendre) une quantité d'un certain produit (matière première, produit agricole, or, devise, ou même produit financier) à une date t future, à un prix fixé aujourd'hui, livraison et réglement se faisant à la date t.

Les forwards et les futures se distiguent cependant dans la manière d'organiser cette transaction. Un "forward" est un contrat de gré à gré - en anglais "over the counter (sur le comptoir)", entre deux protagonistes qui s'engagent de manière privée, sur une transaction spécifique. Par exemple Mr A s'engage le 1° janvier à acheter à Mr B 100 onces d'or à 700$ l'once le 1° juillet. Livraison et paiement se feront le premier juillet.

Ce genre de contrat est évidemment susceptible de mal se terminer : il existe un risque de contrepartie. Supposons par exemple que le 1° juillet l'or cote 720$ l'once. Mr B aura la tentation de faire défaut, c'est à dire de ne pas livrer l'or.

Une deuxième remarque mérite d'être faite : il n'est pas besoin que MrB possède l'or qu'il a promis. A l'échéance il suffit d'opérer un réglement en cash entre acheteur et vendeur. Si le prix de l'or au comptant (spot) est plus élevé que le prix négocié à terme, le vendeur paie la différence à l'acheteur.

Ces deux remarques ont conduit à la création de marché de futures. Ces marchés portent sur des transactions standardisées (par exemple 100 onces d'or 1° juillet). Acheteurs et vendeurs agissent indépendemment et un intermédiaire se charge du rôle de chambre de compensation (clearing house).

Supposons par exemple que MrA achète le 1° janvier un contrat "100 onces d'or juillet" à 700$ l'once. 700$ est le prix coté pour ce contrat le 1° janvier mais il ne sera effectivement payé que le 1° juillet. Pour éviter le risque de défaut on opère cependant des appels de marge : si le 2 janvier le "100 onces d'or juillet" cote 710$, la chambre de compensation opère un appel de marge des vendeurs vers les acheteurs de 10$X100=1000$ par contrat. et ainsi de suite. Le 1° juillet, par définition, le cours du contrat "100 onces d'or juillet" est strictement égal au prix spot de 100 onces d'or, de sorte que le bilan global est exactement le même qu'avec un forward (sans échange matière).

Absence d'opportunité d'arbitrage

Dans cette section nous allons voir comment les prix "futures" et les prix spots sont reliés. Nous allons commencer par des futures sur des produits stockables (or, devises, certaines matières premières...)

Notation 10. *on note p_t^T le prix (coté à la date t) pour livraison et paiement à la date T. On note $B(t,T)$ le prix à la date t de l'obligation zéro coupon de maturité $(T-t)$ (c'est le prix que l'on doit payer à la date t pour avoir 1 euro à la date T)*

- $p_t^T B(t,T)$ est donc le prix que l'on doit payer à la date t pour disposer d'une unité du produit à la date T
- Il existe une autre façon d'obtenir la même chose : acheter le produit immédiatement et le stocker ! Soit alors s le coût de stockage unitaire prévisible sur la durée $T-t$ et payé (pour simplifier) en fin de période.

Proposition 11. *L'absence d'opportunité d'arbitrage impose :*

$$p_t^T B(t,T) = p_t^t + B(t,T)s$$
$$p_t^T = (1+R(t,T-t))^{T-t} p_t^t + s$$

où $R(t,T-t)$ est le taux d'intérêt (par période) associé à la maturité $T-t$.

Dès lors que s est positif, p_t^T est plus grand que le prix au comptant de la date t. Il existe cependant des cas où p_t^T est plus petit. Dans ce cas tout se passe comme si s était négatif : le fait de disposer du produit entre t et T génère un bénéfice. La possibilité de pouvoir en disposer à tout instant a une valeur positive.

Application à un marché à terme monétaire

Le produit standardisé (contrat sous-jacent) est ici un emprunt standardisé : c'est ce qu'on appelle un *emprunt notionnel.* Celui-ci est déterminé par sa maturité et son type. Considérons par exemple les prêts interbancaires à trois mois (un quart d'année), au comptant, sur les marchés non européens, ce type de prêt interbancaire se traite à un taux d'intérêt appelé LIBOR 3mois. C'est un contrat standard de nominal 1 000 000$. Il 'agit de prêter ou d'emprunter 1 000 000 $ sur 3 mois.

Avec les notations du cours, considérons le marché à terme de ce type de contrat. Fixons la période de référence à l'année. Vu de la date 0, un contrat à l'échéance t procure (pour l'acheteur) un flux négatif de 1M$ à la date t et un flux positif égal à $1M \times (1 + f(0,t,1)\frac{1}{4})$ trois mois après. $f(0,t,1)$ est le taux d'intérêt forward annuel associé coté à la date 0 pour la date t.

La relation du cours nous informe que l'absence

2

d'opportunité d'arbitrage implique (en M$) :

$$-B(0,t) \times 1 + B(0,t+1/4) \times 1 \times \left(1 + f(0,t,1)\frac{1}{4}\right)) = 0$$

$$\left(1 + f(0,t,1)\frac{1}{4}\right) = \frac{B(0,t)}{B(0,t+1/4)}$$

Ainsi théoriquement, si à la date 0, la courbe des taux est bien définie, alors le taux à terme est lui aussi parfaitement défini.

$$\left(1 + f(0,t,1)\frac{1}{4}\right) = \frac{(1 + R(0,t+1/4))^{t+1/4}}{(1 + R(0,t))^{t}}$$

$$f(0,t,1) \simeq R(0,t+1/4) + 4t(R(0,t+1/4) - R(0,t))$$