Marché avec incertitude

Offre et demande d'un « actif risqué »

Un cas simple

Prenons un cas simple. On considère un actif dont le prix est égal à p et qui peut rapporter soit 1€ avec probabilité π soit 0 avec probabilité $1-\pi$. L'espérance d'utilité atteinte lorsque le décideur achète x unités de cet actif est donc égale à

$$\pi u\left(\left(1-p\right)x\right)+\left(1-\pi\right)u\left(-px\right)$$

La valeur de x qui maximise cette expression est donc la demande optimale de l'investisseur pour cet actif. En dérivant par rapport à x et en cherchant la valeur de $x$qui annulle la dérivée on obtient que la demande $x^{*}\left(p\right)$ est solution de l'équation en x :

$$\frac{\pi\left(1-p\right)}{\left(1-\pi\right)p}=\frac{u'\left(\left(1-p\right)x\right)}{u'\left(-px\right)}$$

Prenons le cas d'un investisseur risquophobe $u\left(w\right)\equiv-\exp(-\rho w)$, ρ étant l'indice d'aversion au risque. On obtient :

$$\frac{\pi\left(1-p\right)}{\left(1-\pi\right)p}=\exp\left(-\rho x\right)$$

La fonction de demande est donc :

$$x^{*}\left(p\right)=\frac{1}{\rho}\left[\ln\left(\frac{\left(1-p\right)\pi}{p\left(1-\pi\right)}\right)\right]=\frac{1}{\rho}\left[\ln\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)-\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right]$$

Il est commode de noter :

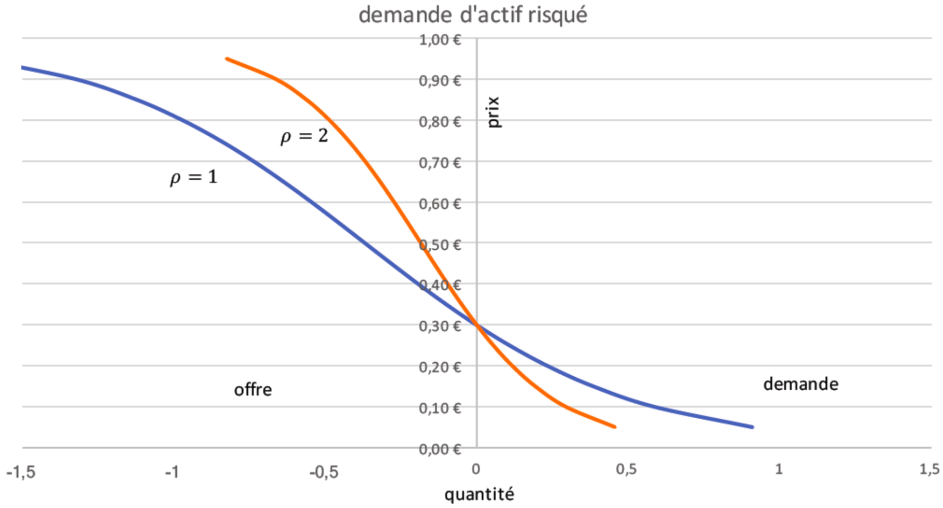
$$\ln\left(\frac{z}{1-z}\right)=\varphi\left(z\right)$$

que l'on peut aussi écrire

$$z=\frac{\exp\left(\varphi\left(z\right)\right)}{1+\exp\left(\varphi\left(z\right)\right)}\equiv\text{logist}\left(\varphi\left(\text{z}\right)\right)$$

Ainsi φ est la fonction réciproque de la fonction logistique $y\rightarrow\frac{\exp y}{1+\exp y}$.
La demande s'écrit donc :

$$x^{*}\left(p\right)=\frac{1}{\rho}\left[\varphi\left(\pi\right)-\varphi\left(p\right)\right]$$



Quand le prix est supérieur à π la demande est négative : le décideur « offre » l'actif. Lorsque le prix est inférieur à π le décideur demande l'actif.

Quand ρ est nul la courbe dedemande est horizontale $p = \pi$, quand ρ augmente, la courbe est de plus en plus décroissante pour les prix proches de π

Un exemple : les marchés prédictifs

Imaginons un actif simple comme ci-dessus dont la probabilité « objective » n'est pas bien définie (au sens où il n'existe pas d'expérience aléatoire qui permettrait de l'estimer, comme un lancer de dés ou un tirage de jeu de hasard). Dans ces cas la probabilité π est une probabilité dite subjective qui dépend du décideur.

Il existe des marchés dits « marchés prédictifs » dont le but est d'estimer la probabilité (subjective) d'un événement. Par exemple la victoire aux élections d'un candidat particulier peut faire l'objet d'un tel marché : on gagne 1€ si le candidat remporte l'élection, 0 sinon. Notons π_i la probabilité subjective de l'individu i , et ρ_i son indice d'aversion au risque.

La demande totale d'actif est :

$$X^*(p) = x^*(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\rho_i} \left[\varphi(\pi_i) - \varphi(p)\right]$$

La quantité totale initiale est nulle, de sorte que le prix d'équilibre est tel que $X^*(p^*) = 0$

Soit :

$$\varphi(p^*) = \frac{\sum_i \frac{1}{\rho_i} \varphi(\pi_i)}{\sum_i \frac{1}{\rho_i}}$$

C'est à dire :

$$p^* = \frac{\exp\left(\frac{\sum_i \frac{1}{\rho_i}\varphi(\pi_i)}{\sum_i \frac{1}{\rho_i}}\right)}{1 + \exp\left(\frac{\sum_i \frac{1}{\rho_i}\varphi(\pi_i)}{\sum_i \frac{1}{\rho_i}}\right)} = \text{logist}\left(\frac{\sum_i \frac{1}{\rho_i}\varphi(\pi_i)}{\sum_i \frac{1}{\rho_i}}\right)$$

Si toutes les probabilités subjectives sont identiques, $\pi_i = \pi$, alors le prix sera égal à cette valeur commune. Sinon, $\varphi(p^*)$ est une moyenne des $\varphi(\pi_i)$ dans laquelle les estimations des individus les moins risquophobes sont surpondérés. Si tous les π_i sont supérieurs à $1/2$, comme la fonction logistique est concave pour les valeurs positives de la variable , $\max \pi_i \geq p^* \geq \frac{\sum_i \frac{1}{\rho_i}\pi_i}{\sum_i \frac{1}{\rho_i}}$. Si au contraire tous les π_i sont inférieurs à $1/2$ alors $\min \pi_i \leq p^* \leq \frac{\sum_i \frac{1}{\rho_i}\pi_i}{\sum_i \frac{1}{\rho_i}}$.

Le principe de diversification

Dans le chapitre précédent nous avons décrit les principales caractéristiques du comportement "risquophobe". Cette modélisation nous a permis de mieux définir la notion de risque et même d'établir une gradation entre situations risquées. Ainsi, deux loteries ayant la même espérance, la première est plus risquée que la seconde si tout décideur risquophobe préfère la seconde.

L'objet de ce premier paragraphe est de donner un sens rigoureux à l'expression : "il ne faut pas mettre tous ses oeufs dans le même panier", qui est la traduction populaire du principe de diversification.

L'idée du principe de diversification est somme toute assez simple et repose sur un constat limpide : (sauf si elles sont parfaitement corrélées) la demi somme de deux variables aléatoires identiquement distribuées est moins risquée que chacune d'entre elles. Si on imagine deux paniers ayant chacun la même probabilité p de tomber (et donc de provoquer la perte des oeufs), mettre un oeuf dans chaque panier est moins risqué que les mettre tous les deux dans l'un.

En effet dans le premier cas on aura 0 oeufs avec probabilité p^2, 2 oeufs avec probabilité $(1-p)^2$, et 1 oeuf avec probabilité $2p(1-p)$. Dans le second 0 avec probabilité p et 2 avec probabilité $1-p$. Les probabilités des extrêmes, 0 et 2, ont diminué : de p à p^2 (soit une baisse de $p(1-p)$) et de $(1-p)$ à $(1-p)^2$ (même baisse !), alors que l'événement "modéré" 1, a vu sa probabilité augmenter d'exactement $2p(1-p)$.

Si $\widetilde{X}$ est la variable aléatoire donnant 1 si le premier panier reste intact et 0 s'il tombe, $\widetilde{Y}$ définie de la même manière pour le deuxième panier, on a $2\widetilde{X}$ et $2\widetilde{Y}$ sont plus risquées que $\widetilde{X}+\widetilde{Y}$.

Dans le cas de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées on peut énoncer le résultat général suivant :

Proposition 1. *si $\widetilde{R}_i$ sont n variables aléatoires réelles identiquement distribuées, et d'espérance finie, alors $\forall \alpha_i$, n nombres réels positifs de somme 1 ($\sum \alpha_i = 1$), $\frac{\sum \widetilde{R}_i}{n}$ est moins risquée que $\sum \alpha_i \widetilde{R}_i$. (et donc en particulier que chacune des $\widetilde{R}_i$)*

Considérons par exemple deux variables aléatoires $\widetilde{R}_1$ et $\widetilde{R}_2$ de même variance σ^2 mais non nécessairement indépendantes. Une étude de la variance permet de se faire une idée du risque d'une combinaison convexe des deux variables.

Considérons $t(\alpha)$:

$$\begin{aligned} t(\alpha) &= \frac{\operatorname{var}\left(\alpha\widetilde{R}_1 + (1-\alpha)\widetilde{R}_2\right)}{\sigma^2} \\ &= \alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)\frac{\operatorname{cov}(\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2)}{\sigma^2} \end{aligned}$$

$t(\alpha)$ est inférieur à 1, car $\operatorname{cov}(\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2) < \sigma^2$. Il est minimum pour $\alpha = 1/2$.

Cas de variables n'ayant pas la même variance

Si maintenant, $\widetilde{R}_1$ et $\widetilde{R}_2$ n'ont pas la même variance, avec par exemple $\operatorname{var}\left(\widetilde{R}_1\right) \leq \operatorname{var}\left(\widetilde{R}_2\right)$. On peut calculer :

$$\begin{aligned} \Sigma^2(\alpha) &= \operatorname{var}\left(\alpha\widetilde{R}_1 + (1-\alpha)\widetilde{R}_2\right) \\ &= \alpha^2 \operatorname{var}(\widetilde{R}_1) + (1-\alpha)^2 \operatorname{var}\left(\widetilde{R}_2\right) + 2\alpha(1-\alpha)\operatorname{cov}(\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2) \end{aligned}$$

La dérivée de cette fonction vaut :
$\frac{d\Sigma^2}{d\alpha} = 2\alpha(\operatorname{var}(\widetilde{R}_1) - cov(\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2)) - 2(1-\alpha)(\operatorname{var}\left(\widetilde{R}_2\right) - \operatorname{cov}(\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2))$

Il existe un minimum entre 0 et 1 si $\frac{d\Sigma^2}{d\alpha}(0) \leq 0 \leq \frac{d\Sigma^2}{d\alpha}(1)$, c'est à dire si

$$\begin{aligned} \operatorname{var}\left(\widetilde{R}_2\right) - \operatorname{cov}(\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2) &\geq 0 \\ \operatorname{var}\left(\widetilde{R}_1\right) - \operatorname{cov}(\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

C'est à dire si

$$\text{var}\left(\widetilde{R}_1\right) - \text{cov}(\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2) \geq 0$$

Que l'on écrit :

$$\frac{\text{cov}(\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2)}{\text{var}\left(\widetilde{R}_1\right)} \leq 1$$

Proposition 1. $\frac{cov(\widetilde{R}_1,\widetilde{R}_2)}{var\left(\widetilde{R}_1\right)}$ *est appelé coefficient* $\beta(\widetilde{R}_2/\widetilde{R}_1)$ *de 2 par rapport à 1 : même si la variance de 2 est plus grande que celle de 1, une combinaison (positive, la somme des poids étant égale à 1) des deux variables permet de diminuer le risque si* $\beta(\widetilde{R}_2/\widetilde{R}_1) \leq 1$. *En terme de corrélation, si* $\tau = \frac{cov(\widetilde{R}_1,\widetilde{R}_2)}{\sqrt{var\left(\widetilde{R}_1\right)var\left(\widetilde{R}_2\right)}}$ *est le coefficient de corrélation, cela veut dire que* $\tau\sqrt{var\left(\widetilde{R}_2\right)} \leq \sqrt{var\left(\widetilde{R}_1\right)}$ *(Ceci est toujours vrai si* $\tau \leq 0$*). Dans ce cas une combinaison positive des deux actifs permet de diminuer le risque.*

En revanche si tel n'est pas le cas il faut combiner les deux variables avec un coefficient négatif, c'est à dire vendre l'un des deux actifs à découvert.

Proposition 2. *De manière générale il existe toujours une combinaison linéaire (dont la somme des coefficients est égale à 1) des variables qui a une variance plus petite que chacune des variances des variables aléatoires qui la composent.*

Choix de portefeuille

Dans ce paragraphe on se propose d'analyser le problème de choix de portefeuille d'une manière générale. Un investisseur a 1 euro à "placer", comment doit-il les répartir entre les différents actifs disponibles ? Evidemment la réponse dépend de son attitude au risque. Nous allons supposer ici que notre investisseur utilise le critère "moyenne-variance", c'est à dire qu'il évalue $E(\widetilde{v}) - \frac{1}{2}\theta\text{var}(\widetilde{v})$ pour comparer les variables aléatoires.

On considère K actifs financiers, $k = 1, ..., K$. Le revenu de l'actif k est une variable aléatoire réelle $\widetilde{a}_k$: c'est le revenu (cash) aléatoire que procure cet actif dans le futur. Cette variable aléatoire est supposée connue grâce à des étude statistiques. On note p_k le prix, sur le marché, de l'actif k. Il est assez commode de définir le rendement de l'actif k comme la variable aléatoire qui mesure le revenu pour un euro investi : $\widetilde{R}_k = \frac{\widetilde{a}_k}{p_k}$. Il existe par ailleurs un actif sans risque, l'actif 0, qui rapporte R_0 (non aléatoire) euros par euro investi. Un portefeuille risqué est un vecteur z dont chaque composante z_k mesure la quantité d'actif k détenue.

Un portefeuille z procure donc un revenu aléatoire $\widetilde{v} = \sum \widetilde{a}_k\ z_k$ et coûte ${}^t zp$.

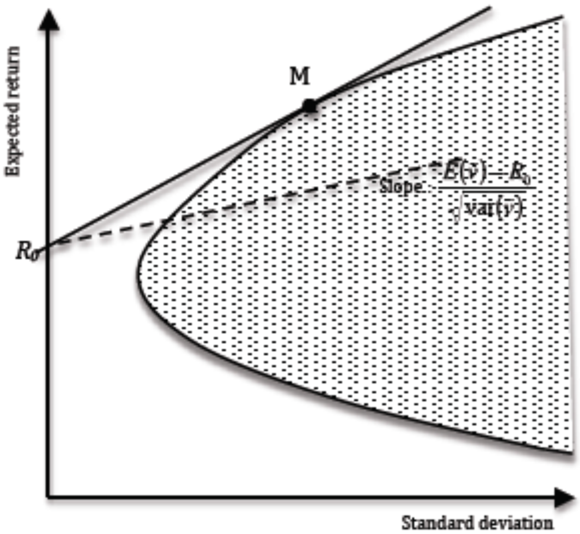
On peut écrire le revenu en fonction des rendements :

$$\widetilde{v} = \sum \frac{\widetilde{a}_k}{p_k} p_k z_k = \sum \widetilde{R}_k x_k = {}^t x\widetilde{R}$$

Où $x_k = p_k z_k$ est la dépense affectée à l'achat de l'actif k.

Raisonnement graphique

Avant d'effectuer les calculs, utilisons un raisonnement graphique. Le graphique suivant représente chaque portefeuille par un point dont les coordonnées sont l'écart-type (c'est-à-dire la racine carrée de la variance $\sqrt{var\,(\widetilde{v})}$ de son rendement sur l'axe horizontal et l'espérance $\mathbb{E}\,(\widetilde{v})$ sur l'axe vertical.



On peut montrer que l'ensemble des points (écart-type, espérance) possibles en combinant les actifs risqués a la forme de zone hachurée. Pour s'en convaincre on pourra par exemple prendre le cas de deux actifs. Envisageons alors un portefeuille dans ce domaine et combinons-le avec l'actif sans risque. Disons par exemple que l'on met $1-x_0$ euros sur ce portefeuille et x_0 sur l'actif sans risque. L'espérance sera $\mathbb{E}(\widetilde{w}) = x_0 R_0 + (1-x_0)\mathbb{E}(\widetilde{v})$ et l'écart type $\sqrt{\mathrm{var}(\widetilde{w})} = (1-x_0)\sqrt{\mathrm{var}(\widetilde{v})}$. Le rendement excédentaire espéré est $\mathbb{E}(\widetilde{w}) - R_0 = (1-x_0)(\mathbb{E}(\widetilde{v}) - R_0)$ de sorte que $\frac{\mathbb{E}(\widetilde{w})-R_0}{\sqrt{\mathrm{var}(\widetilde{w})}} = \frac{\mathbb{E}(\widetilde{v})-R_0}{\sqrt{\mathrm{var}(\widetilde{v})}}$. Le point obtenu est sur la droite joignant le point $(0, R_0)$ et le point $\left(\sqrt{\mathrm{var}(\widetilde{v})}, \mathbb{E}(\widetilde{v})\right)$ dont la pente est exactement $\frac{\mathbb{E}(\widetilde{v})-R_0}{\sqrt{\mathrm{var}(\widetilde{v})}}$ qui est appelé "le ratio Sharpe" du portefeuille.

Ainsi, toutes les combinaisons possibles sont obtenues en traçant des lignes entre la zone hachurée et le point $(0, R_0)$.

Pour un portefeuille avec un écart-type donné (un risque donné), nous recherchons ceux dont le rendement espéré est le plus élevé. Pour ce faire, considérons le point M qui a le ratio de Sharpe maximal dans la zone hachurée. En combinant ce portefeuille avec l'actif sans risque, on obtient les portefeuilles sur la droite en gras. De toute évidence, la région située au-dessus de cette ligne ne peut pas être atteinte : il n'existe aucune combinaison réalisable qui donne ces espérances et cet écart-type. Inversement, les points au dessous sont tous réalisables.

La ligne en gras est donc la "frontière efficiente" du marché : les points efficaces (ceux dont le rendement maximal escompté au risque donné) sont sur cette ligne M est le portefeuille de marché : tous les investisseurs partagent leur investissement entre l'actif sans risque et ce portefeuille particulier.

Mathématiquement

Montrons le mathématiquement.

Supposons que notre investisseur ait un euro à répartir entre les différents actifs. Il doit donc choisir de répartir cet euro entre l'actif sans risque (x_0) et les actifs risqués $x = (x_1, ...x_K)$ avec[1] $x_0 + {}^t x\mathbf{1} = 1$. Cette stratégie lui rapporte pour cet euro, un revenu égal à $x_0 R_0 + {}^t x\widetilde{R}. = R_0 + {}^t x(\widetilde{R} - R_0\mathbf{1})$.

On pose $\widetilde{S} = \widetilde{R} - R_0\mathbf{1}$, le vecteur des rendements excédentaires par rapport à l'actif sans risque. Le revenu de l'euro investi est donc égal à $\widetilde{v} = R_0 + {}^t x\widetilde{S}$.

Le problème qui se pose pour cet investisseur est de choisir x de manière la plus rationnelle possible compte tenu de son attitude face au risque.

On peut étudier la stratégie (x_0, x) en fonction de son espérance (que rapporte-t-elle en moyenne) et de sa variance (quel risque comporte-t-elle).

On a :

$$\begin{cases} E(\widetilde{v}) = R_0 + {}^t xE(\widetilde{S}) \\ \mathrm{var}(\widetilde{v}) = E\left[(\widetilde{v} - E(\widetilde{v}))^2\right] \end{cases}$$

1. $\mathbf{1}$ est le vecteur formés de K composantes toutes égales à 1

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{var}(\widetilde{v})=E\left[({}^t x\widetilde{R}-{}^t xE(\widetilde{R}))^2\right]\\ =E\left[{}^t x(\widetilde{R}-E(\widetilde{R}))^t(\widetilde{R}-E(\widetilde{R}))x\right]\\ ={}^t xE\left[(\widetilde{R}-E(\widetilde{R}))^t(\widetilde{R}-E(\widetilde{R}))\right]x\end{array}\right.$$

Posons

$$\Omega=E\left[(\widetilde{R}-E(\widetilde{R}))^t(\widetilde{R}-E(\widetilde{R}))\right]$$

Ω s'appelle la matrice (symétrique) de variance covariance des actifs son élément ij est égal à $\sigma_{ij}=E\left[(\widetilde{R}_i-E(\widetilde{R}_i))(\widetilde{R}_j-E(\widetilde{R}_j))\right]$. σ_{ij} est la covariance entre les actifs i *et* j. *La* formule ci dessus montre que cettre matrice symétrique est positive (la forme quadratique associée est positive : ${}^t x\Omega x$ est une variance, c'est-à-dire une moyenne de carrés).

Proposition 2. *En résumé, la stratégie (x_0,x) rapporte $R_0+{}^t xE(\widetilde{S})$ en moyenne avec une variance égale à ${}^t x\Omega x$.*

Notation 3. *Dans la suite si $\widetilde{v}$ est une variable aléatoire, on note v son espérance. Ici $S_i=E(\widetilde{S}_i)$, $R_i=E(\widetilde{R}_i)$.*

Comment choisir entre toutes les stratégies possibles ? Clairement de deux stratégies donnant la même espérance, n'importe quel investisseur risquophobe préfère la stratégie de variance minimale. Fixons donc à notre investisseur un rendement espéré m et cherchons les vecteurs x de $\mathbb{R}^K$ qui minimisent la variance parmi les x donnant donnant m comme rendement espéré. Considérons le problème d'optimisation (P) :

$$(P)\left\{\begin{array}{c}\min\limits_x({}^t x\Omega x)\\ {}^t xS=m-R_0\end{array}\right.$$

Définissons le nouveau produit scalaire :

Definition 4. *$<x,y>={}^t x\Omega y$ est un produit scalaire (forme quadratique définie positive) notons $\| x \|$, la norme associée.*

Le problème devient :

$$(P)\left\{\begin{array}{c}\min\limits_x \| x \|^2\\ <\Omega^{-1}S,x>=m-R_0\end{array}\right.$$

Cela consiste à trouver le point d'un hyperplan affine ($<\Omega^{-1}S,x>=m-R_0$), qui est à la distance minimale de l'origine. Ce point est évidemment la projection orthogonale x^* de 0 sur cet hyperplan. *Il* est donc défini par les deux équations suivantes, d'inconnues x^* et λ :

$$\left\{\begin{array}{c}x^*=\lambda\Omega^{-1}S\\ <\Omega^{-1}S,x^*>=m-R_0\end{array}\right.$$

La première exprime que x^* est colinéaire au vecteur normal à l'hyperplan $\Omega^{-1}S$, La seconde exprime que le point de projection appartient à cet hyperplan affine.

— Une remarque importante mérite d'être faite : x^* est un vecteur qui est proportionnel au vecteur $\Omega^{-1}S$ qui ne dépend pas de m. Autrement dit, quel que soit le rendement espéré demandé, la structure du portefeuille risqué est identique. Par structure on entend la proportion relative des différents actifs risqués.

— Bien sûr on peut facilement résoudre le système précédent :

$$x^*=\frac{(m-R_0)}{{}^t S\Omega^{-1}S}\Omega^{-1}S$$

— Comment notre investisseur choisit-il le niveau m? Evidemment ceci résulte de son arbitrage entre moyenne et variance, il s'agit de maximiser en m :

$$E(\widetilde{v})-\frac{1}{2}\rho var(\widetilde{v})=m-\frac{1}{2}\rho(m-R_0)^2\frac{1}{{}^t S\Omega^{-1}S}$$

Definition 5. *On appelle portefeuille de marché le portefeuille* $x^m = \frac{\Omega^{-1}S}{{}^t\mathbf{1}\Omega^{-1}S} = \mu\Omega^{-1}S$*, portefeuille qui ne comporte que des actifs risqués dans les proportions relatives définies par les solutions des problèmes* (P).
Le rendement de ce portefeuille est noté : $\widetilde{R}_m = R_0 + {}^t x^m \widetilde{S}$,
La variance de son rendement est :

$$var(\widetilde{R}_m) = {}^t x^m \Omega x^m$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}(\Omega x^m)_i &= \sum_j \sigma_{ij} x_j^m \\ &= cov(\widetilde{R}_i, \sum \widetilde{R}_j x_j^m) \\ &= cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_m)\end{aligned}$$

Ce portefeuille s'appelle portefeuille de marché parce que, sous l'hypothèse d'investisseurs "moyenne-variance", ce qui précède montre que tous les individus demandent un portefeuille dont la composante risquée est proportionnelle à ce portefeuille. Il en résulte, que la somme de tous les portefeuilles détenus a la même structure (dans sa partie risquée). Bien sûr, un individu très risquophobe demandera peu de ce portefeuille risqué et concentrera son investissement sur l'actif sans risque. Au contraire, un individu moins risquophobe choisira un x_0 plus petit. Tout se passe comme si chaque investisseur achetait un morceau de la capitalisation boursière totale, morceau plus ou moins grand selon l'aversion !

Formule du MEDAF

Ce qui précède permet de trouver une des formules les plus célèbres de la finance !
On a :

$$\begin{aligned}\Omega x^m &= \mu\rho \\ var(\widetilde{R}_m) &= {}^t x^m \Omega x^m = \mu {}^t x^m \rho = \mu(R_m - R_0)\end{aligned}$$

Ceci implique :

$$\frac{\Omega x^m}{var(\widetilde{R}_m)}(R_m - R_0) = \rho$$

Ce qui s'écrit, composante par composante :

$$\frac{cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_m)}{var(\widetilde{R}_m)}(R_m - R_0) = (R_i - R_0)$$

Proposition 6. *Pour n'importe quel actif i, sa surperformance moyenne par rapport à l'actif sans risque* $R_i - R_0$ *est proportionnelle à la surperformance du portefeuille de marché* $R_m - R_0$*. Le coefficient de proportionalité est le* β *de i par rapport au portefeuille de marché.*

$$\begin{aligned}R_i - R_0 &= \beta_i(R_m - R_0) \\ \beta_i &= \frac{cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_m)}{var(\widetilde{R}_m)}\end{aligned}$$

Limites de la diversification

Si les variables aléatoires qui représentent les rendements $\widetilde{R}_i$ ont des « traines épaisses » (par exemple suivent des distribution de Cauchy) la diversification peut être parfaitement inopérante ou même contre-productive. Ainsi si $\widetilde{R}_1$ et $\widetilde{R}_2$ sont deux variables indépendantes de même loi de Cauchy, $\frac{1}{2}\left(\widetilde{R}_1 + \widetilde{R}_2\right)$ suit encore la même loi de Cauchy. Alors que dans le cas normal par exemple, $\frac{1}{2}\left(\widetilde{R}_1 + \widetilde{R}_2\right)$ est gaussien avec une variance divisée par deux.

Dans un monde où les distributions de probabilité sont à traine épaisses, les développements précédents sont invalides. Il faut donc être très prudent dans l'application de ces modèles.