Arbitrage, incertitude, évaluation risque neutre

Dans le chapitre précédent nous avons modélisé la demande (et l'équilibre) d'actifs risqués. Le modèle du MEDAF (choix de protefeuille) débouche sur un résultat important qui lie les rendements des actifs au rendement "du marché" :

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{R}_i\right] - R_0 = \frac{\mathrm{cov}(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_m)}{\mathrm{var}(\widetilde{R}_m)}\left(\mathbb{E}\left[\widetilde{R}_m\right] - R_0\right)$$

En revenant à l'expression du rendement $\widetilde{R}_i = \frac{\widetilde{a}_i}{p_i}$, où $\widetilde{a}_i$ est le revenu (aléatoire) de l'actif i et p_i son prix. On a, en notant $R_i \equiv \mathbb{E}\left[\widetilde{R}_i\right]$

$$\frac{1}{p_i}\mathbb{E}\widetilde{a}_i - R_0 = \frac{1}{p_i}\frac{\mathrm{cov}\left(\widetilde{a}_i, \widetilde{a}_m\right)}{\mathrm{var}\left(\widetilde{a}_m\right)}\left(a_m - p_m R_0\right)$$

c'est-à-dire :

$$p_i = \frac{1}{R_0}\left(\mathbb{E}\widetilde{a}_i - \frac{\mathrm{cov}\left(\widetilde{a}_i, \widetilde{a}_m\right)}{\mathrm{var}\left(\widetilde{a}_m\right)}\left(a_m - p_m R_0\right)\right)$$

ou encore :

$$p_i = \frac{1}{R_0}\mathbb{E}\left[\widetilde{a}_i\left(1 - \frac{\left(a_m - p_m R_0\right)}{\mathbb{E}\left(\left(\widetilde{a}_m - a_m\right)^2\right)}\left(\widetilde{a}_m - a_m\right)\right)\right] \equiv \frac{1}{R_0}\mathbb{E}\left[\widetilde{a}_i \widetilde{z}_m\right]$$

Dans l'expression précédente on remarque que $\mathbb{E}\left(\widetilde{z}_m\right) = 1$. Tout se passe comme si on calculait l'espérance du revenu $\widetilde{a}_i$ en prenant comme nouvelle probabilité $d\mathbb{P}_z = \widetilde{z}_m d\mathbb{P}$. Avec cette "nouvelle" densité de probabilité, le prix d'un actif quelconque est égal à la valeur actualisée de l'espérance de son revenu.

Proposition 1 *Dans le modèle du MEDAF, le prix de chacun des actifs est égal, à l'équilibre, la valeur actualisée de l'espérance de son revenu, calculée en prenant une densité de probabilité multipliée par* $\widetilde{z}_m$*. On dit que le prix est la valeur actualisée de l'espérance "neutre au risque" des revenus*

L'objectif de ce chapitre est de montrer que ce résultat est général et résulte d'un propriété simple de l'équilibre : l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Introduction

L'idée principale de la "valorisation neutre au risque" est que les prix de marché des actifs donnent des informations suffisantes sur le risque. Donnons un exemple.

Supposons qu'il y ait deux obligations sur le marché (donc deux actifs correspondant à des dettes). La première est émise par un gouvernement : sa maturité est d'un an, son nominal est $N_1 = 100$ euros et son prix est $B_1 = 90$. Cela signifie que son rendement est $r_1 = \frac{100}{90} - 1 = 11,1\%$ (ce qui est très élevé mais très pratique pour des calculs simples).

$$B_1 = 90, 1 + r_1 = \frac{100}{90}$$

La seconde est une obligation d'entreprise émise par une société, son remboursement est également de 100 euros en un an, mais il y a un risque de défaut. En cas de défaut de paiement, le remboursement ne sera que de 80. Le remboursement est donc aléatoire. Son rendement nominal doit donc être supérieur à celui de l'obligation sans risque car les investisseurs exigent un meilleur rendement pour compenser ce risque de défaut.

Évidemment B_2 est plus grand que 72 : si on achète 10 unités de cette obligation on est sûr d'obtenir au moins 800 que l'on peut aussi obtenir en achetant 8 obligations de type 1 : $10B_2 \geq 8B_1 \Longleftrightarrow B_2 \geq 72$. Mais évidemment le prix ne peut pas être supérieur à 90 : puisque 90 permet d'obtenir sûrement 100 à la date 1. Nous pouvons écrire :

$$72 \leq B_2 \leq 90$$

qui est équivalent à

$$\exists \widehat{\Pi} \in [0,1], B_2 = \widehat{\Pi} \times 72 + \left(1 - \widehat{\Pi}\right) 90$$

$\widehat{\Pi}$, par construction, a toutes les propriétés d'une probabilité. On l'appelle la probabilité "neutre au risque". Remarquons, qu'intuitivement cette probabilité varie dans le même sens que la "vraie probabilité" : B_2 proche de 72 signifie qu'il y a une probabilité de défaut élevée. Nous verrons ci dessous son lien avec "la vraie probabilité".

.

Nous pouvons aussi écrire :

$$B_2 = \frac{90}{100} \left[\widehat{\Pi} \times 80 + \left(1 - \widehat{\Pi}\right) 100\right]$$

Nous avons aussi évidemment :

$$B_1 = \frac{90}{100} \left[\widehat{\Pi} \times 100 + \left(1 - \widehat{\Pi}\right) 100\right]$$

Proposition 2 *Le prix de chaque obligation est égal à la valeur actualisée de ses paiements, l'espérance étant calculée avec la probabilité neutre au risque (PNR). Le facteur d'actualisation est* $\frac{1}{1+r_1} = \frac{90}{100}$*, et la probabilité neutre au risque est* $\widehat{\Pi} = \frac{90-B_2}{18}$.

Supposons qu'à ces deux obligations s'ajoute un nouveau produit financier : un CDS (credit default swap). Ce produit promet 1 euro en cas de défaillance de l'entreprise. En un sens, il s'agit d'un produit d'assurance parce qu'il indemnise les pertes dues à un défaut de paiement. Considérons la stratégie de portefeuille suivante : acheter la deuxième obligation et immuniser le risque en achetant 20 CDS. Cette stratégie donne exactement 100 euros en un an, et est donc totalement identique à l'obligation 1, le prix de ce portefeuille doit alors être égal à B1.

$$B_2 + 20C = B_1$$

Ceci donne le prix du CDS :

$$C = \frac{B_1 - B_2}{20} = \frac{90}{100} \left[\widehat{\Pi} \times 1 + \left(1 - \widehat{\Pi}\right) \times 0\right]$$

Le point important est que le prix du CDS (qui est un produit d'assurance) peut être calculé sans connaître la véritable probabilité de défaut, dès que l'on connaît les prix de l'actif sous-jacent et le taux sans risque (rendement des obligations d'Etat) !

Nous obtenons ainsi le résultat intéressant :

Proposition 3 *les prix des trois actifs sont égaux à leurs valeurs actualisées espérées calculées avec la même distribution de probabilité, dite "Probabilité neutre au risque".*

Lien avec la "vraie" probabilité (objective ou subjective)

La probabilité neutre au risque est-elle la "vraie" probabilité de défaut ? Supposons par exemple que $B_2 = 81$ de sorte que $\widehat{\Pi} = \frac{1}{2}$. Prenons deux portefeuilles : le premier avec 10 obligations de type 2 et le second avec 9 obligations de type 1. La valeur des deux portefeuilles est de 810. Mais l'une est risquée et l'autre non. Intuitivement, le premier doit avoir un rendement espéré "objectif" plus élevé (une prime de risque). Soit Π la probabilité de défaut. On doit avoir :

$$10 \times [\Pi \times 80 + (1-\Pi) \times 100] \geq 9 \times [\Pi \times 100 + (1-\Pi) \times 100]$$

Ce qui donne $\Pi \leq \frac{1}{2} = \widehat{\Pi}$.

La probabilité "neutre au risque" surpondère les états défavorables par rapport à la probabilité "vraie". Ceci est conforme au résultat que nous avons mis en évidence plus haut.

En effet, si l'on revient à l'expression du MEDAF : $p_i = \frac{1}{R_0}\mathbb{E}\left[\widetilde{a}_i \widetilde{z}_m\right]$, où $\widetilde{z}_m$ est une fonction affine décroissante de $\widetilde{a}_m$. On surpondère les états dans lesquels $\widetilde{a}_m$ est petit. Rappelons que $\widetilde{a}_m$ est le revenu du "marché" c'est à dire le revenu global de l'ensemble des actifs.

Modèle général

Nous allons adopter ne modélisation de l'incertitude extrêmement rudimentaire. Un état du monde ω est une réalisation particulière de l'ensemble des possibles. Par exemple, à la date 0 l'état du monde à la date 1 est incertain. On note $\Omega = \{\omega_i, i = 1, ... |\Omega|\}$, l'ensemble des possibles. A priori ici on supposera que l'ensemble Ω est fini. On dit que l'on est dans une situation de risque lorque l'état n'est pas connu à l'avance mais que l'on connaît la probabilité de chacun des états de Ω. On dit que Ω est un espace probabilisé fini. On parle d'incertitude lorsqu'on connaît les possibles mais pas les probabilités, et d'incertitude radicale lorsque l'on ne sait rien du tout! Ici nous nous plaçons dans le cas de risque ou d'incertitude. Le passage au monde continu est un peu compliqué et relève plutôt d'un cours de probabilités ou de statistiques. Ici, pour faire comprendre les intuitions nous n'avons besoin que d'une description "discrète" de l'alea. Evidemment cela perd un peu en réalisme.

Comme on l'a vu dans l'introduction, les ressources des décideurs ou des acteurs économiques sont soumis à des aléas. On décrira ce phénomène en disant que la "richesse" ou le "revenu" d'un agent est une variable aléatoire (c'est-à-dire une application de Ω dans $\mathbb{R}$).

De la même manière, un actif financier est un bien économique particulier qui procure un revenu aléatoire. Par exemple, une action d'une entreprise donne droit à une participation à ses bénéfices qui sont aléatoires. Une action est un actif financier risqué au sens ou son revenu est aléatoire.

A priori, on peut être surpris que des individus ayant "peur" du risque achètent des actifs financiers risqués. Une partie de la réponse à cette question tient dans le fait que certains acteurs ont besoin de "se couvrir" c'est à dire d'acheter des actifs dont l'aléa vient en quelque sorte neutraliser sa propre exposition au risque.

Actifs financiers

On raisonne ici sur deux dates : la date 0 à laquelle s'opèrent les transactions et la date 1, date à laquelle on encaisse les revenus aléatoires associés.

Notation 4 *On note Ω l'ensemble des états de la nature (de la date 1). On suppose que Ω est fini de cardinal $|\Omega|$.*

Definition 5 *Un actif financier est une variable aléatoire :*
$\widetilde{a} : \Omega \to \mathbb{R}^+,$
$\omega \to a(\omega)$
On note par la lettre p le prix de cet actif à la date 0
Acheter l'actif à la date 0 entraine ainsi un décaissement p et donne droit au revenu aléatoire $a(\omega)$ à la date 1.

On suppose qu'il existe à la date 0 un marché sur lequel K actifs financiers différents sont disponibles. On peut ainsi résumer l'ensemble des données par le tableau composé du vecteur prix et de la matrice des revenus :

$$p = [p_k]_{K,1}\ A = [a_{ki} = a_k(\omega_i)]_{K,|\Omega|}$$

Par construction les vecteurs "colonne" sont associés aux actifs et à l'indice k et les vecteurs lignes aux états de la natures (à l'aléa).

Definition 6 *On appelle portefeuille, ou stratégie d'achat-vente, un vecteur z de $\mathbb{R}^k$ qui spécifie la quantité (positive ou négative) de chaque actif détenue (ou "achetée") par un décideur.*

La k ième composante du vecteur portefeuille est la quantité détenue d'actif correspondant . Il faut noter qu'une quantité négative est possible. On parle alors de "vente à découvert" : le décideur s'engage à payer les revenus correspondants à l'actif en question. Par exemple, vendre une action à découvert signifie simplement que le jour venu je dois donner le revenu associé à cette action.

A l'échéance le portefeuille z donne le revenu aléatoire v_z donné par la formule :

$$v_z = {}^t zA$$

v_z est un vecteur ligne dont chaque composante représente le revenu dans l'état de la nature correspondant.

Le coût à la date 0 du portefeuille z est évidemment égal à :

$$c(z) = {}^t zp$$

Definition 7 *On dit que le marché est complet si et seulement si on peut générer par au moins un portefeuille n'importe quel profil de revenu :*

$$\forall v \in \mathbb{R}^{|\Omega|}, \exists z \in \mathbb{R}^K, {}^t zA = v$$

On comprend bien l'intérêt de la notion de marché complet : pouvoir générer n'importe quel revenu aléatoire signifie, en particulier que l'on peut "immuniser" n'importe quel risque auquel on est exposé. Si par exemple on a des recettes futures en dollar. Si les marchés sont complets on peut s'assurer à l'avance du taux de change en achetant l'actif financier qui varie en sens inverse.

Proposition 8 *Le marché est complet si et seulement si $rg(A) = |\Omega|$, c'est–à–dire en particulier, si $K \geq |\Omega|$: il y a au moins autant d'actifs que d'états de la nature.*

Dans le cas de marché complet, il est inutile d'avoir des actifs "redondants", on suppose alors que $K = |\Omega|$. et la matrice A est carrée régulière.

Dans le cas de marchés complets il est intéressant de définir ce qu'on appelle les actifs d'Arrow, (du nom d'un prix Nobel d'Economie). Les actifs d'Arrow sont simplement les actifs qui procurent les profils correspondants à la base canonique de $\mathbb{R}^{|\Omega|}$ (ce sont des sortes de zéro-coupons...):

Definition 9 *L'actif d'Arrow i donne 1 euro dans l'état ω_i et 0 sinon :*
$\delta_i = (0, 0, ..., 1, 0, 0)$.

Quel est le coût de cet actif?

Le portefeulle associé est : ${}^t z = \delta_i A^{-1}$, son coût est $q(\omega_i) = {}^t zp = \delta_i A^{-1} p$, on note $q_i \equiv q(\omega_i)$.

Proposition 10 *Si le marché est complet, le vecteur $q = A^{-1}p$ est le vecteur prix des actifs élémentaires d'Arrow. q_i représente le prix qu'il faut payer pour avoir un euro dans l'état ω_i et zéro sinon.*

Que se passe-t-il si la matrice A est telle qu'une des composantes du vecteur $A^{-1}p$ est négative? La situation dans ce cas serait asssez amusante. On pourrait encaisser de l'argent aux deux périodes. la valeur négative du prix à la date 0 et 1 euro si l'état de la nature se réalise à la date 1. Voila une façon de s'enrichir sans risque. On dit qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage si ce n'est pas possible.

Definition 11 *Si le marché est complet, l'absence d'opportunité d'arbitrage implique que le vesteur $A^{-1}p$ a toutes ses composantes strictement positives.*

Marché incomplet

Supposons maintenant, avec plus de réalisme que $K < |\Omega|$. Peut-on généraliser ce qui précède?

Definition 12 *On dit que z est un portefeuille d'arbitrage si :*

$$\begin{cases} {}^t zA \geq 0 \\ {}^t zp \leq 0 \\ \textit{avec une inégalité stricte} \end{cases}$$

(dans cette définition ≥ 0 pour un vecteur, veut dire composante par composante)

Definition 13 *On dit que le marché vérifie la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) s'il n'existe pas de portefeuille d'arbitrage.*

Evidemmment, l'absence d'opportunité d'arbitrage implique que si deux actifs donnent les même revenus ils doivent avoir le même prix (sinon la différence des deux serait un portefeuille d'arbitrage). Cette remarque est à la base de la technique centrale d'évaluation des actifs financiers : la technique d'évaluation par "réplication". Si en combinant des actifs disponibles on arrive à reconstituer les revenus d'un autre actifs, alors le prix de cet actif est égal au prix de la combinanison.

Il existe un théorème de la finance qui permet de caractériser les marchés AOA :

Proposition 14 *Un marché est AOA si et seulement si il existe un vecteur q à composantes strictement positives tel que :*

$$p = Aq$$

Le prix de l'actif k est égal à la somme pondérée par q de ses revenus :

$$p_k = \sum_{|\Omega|} a_{ki} q_i$$

Remarquons que le prix de n'importe quel portefeuille s'exprime de la même façon :

$${}^t zp = {}^t zAq = v_z q = \sum_{|\Omega|} v_i q_i$$

Il est important de remarquer que si le marché est incomplet, le vecteur q n'est pas unique. Il en résulte que seuls les profils de revenus v réalisables (par un portefeuille) sont valorisables par la formule $\sum_E v_i q_i$.

Une remarque centrale mérite d'être faite. Supposons que l'un des actifs soit sans risque : il donne 1 dans tous les états de la nature. Par application directe de ce qui précède on trouve : $\sum_{|\Omega|} q_i$. Or on sait depuis le chapitre précédent que le prix de cet actif s'écrit (par définition du taux d'intérêt sur 1 période) $\frac{1}{1+R(0,1)}$. Si l'on pose $\pi_i \equiv (1 + R(0,1))q_i$. On a $\sum_{|\Omega|} \pi_i = 1$. On retrouve ici la probabilité neutre au risque du paragraphe précédent. Et donc :

$$\text{prix du portefeuille } z \quad : \quad {}^t zp = \frac{1}{1+R(0,1)} \sum_{|\Omega|} \pi_i v_i$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad : \quad {}^t zp = \frac{1}{1+R(0,1)} \; \mathbb{E}_\pi [v]$$

Espérance (sous π) actualisée des revenus

Remarques finales

Evaluer un actif par AOA suppose de calculer le (un) vecteur q. Quand les marchés sont complets, en particulier, cette méthode est très puissante pour évaluer les produits dérivés c'est à dire les actifs dont les revenus sont contingents au comportement. d'autres actifs. L'exemple le plus simple est celui concernant la valorisation d'options. Une option est un actif qui donne le droit d'acheter un autre actif à un prix fixé à l'avance. On voit facilement que le revenu de cet actif dérivé est conditionné au cours de l'actif sous jacent.

Quand les marchés ne sont pas complets, l'imaginantion des financiers est sans bornes et crée de manière permanente de nouveaux actifs qui permettent de tenir compte d'états de la nature non "couverts" par les actifs disponibles. Par exemple, les actifs "climatiques" sont des actifs dont les revenus sont contingents au climat. Les actifs "catastrophes" sont des actifs contingents aux événements catastrophiques...

Cependant, dans la réalité, il n'est pas certains que les hypothèses centrales des modèles précédents (marchés complets, absence d'opportunité d'arbitrage, absence de frictions, information symétrique) soient vérifiées. Il faut donc prendre ces modèles avec précaution. L'exmple suivant illustreune des limites de l'évaluation risque neutre.

Imaginons une institution financière qui a acheté deux obligations (d'entreprise) a et b de maturité 1. Par simplicité on va supposer que le revenu de chacune de ces obligations (le remboursement) est égal à 1 et que le taux d'intérêt est égal à 0. Les prix de ces obligations sont p_a et p_b. Chacune a un risque de défaut total auquel cas le revenu est égal à 0.

Il y a donc 4 états possibles : les deux font défaut, a fait défaut et b non, b fait défaut et a non, aucune ne fait défaut. Il n'y a que trois actifs : a, b et l'actif sans risque La matrice des paiements est :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le profil de revenu du portefeuille risqué initial est :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

pour définir la probabilité neutre au risque on a donc trois équations à 4 inconnues :

$$p_a = \pi_{10} + \pi_{11}$$

$$p_b = \pi_{01} + \pi_{11}$$

$$1 = \pi_{00} + \pi_{01} + \pi_{10} + \pi_{11}$$

L'institution financière "titrise" ces deux obligations en créant deux obligations a^* et b^* dont les revenus sont :

$$a^* : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b^* : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarquons que ces deux actifs sont complétement couverts par les actifs initiaux.

Cette pratique permet de revendre une partie de son portefeuille sous forme d'actif plus sûr que les catifs initiaux. a^* est plus sûre que chacune des deux obligations de base, c'est la "tranche senior". En revanche b^* est largement plus risquée.

Quel est le prix de a^* ? La théorie précédente ne permet pas de le dire parce que a^* n'est pas une combibaison de a et de b et que le marché n'est pas complet.

Faisons une hypothèse supplémentaire qui équivaut à l'indépendance :

$$\pi_{11} = (\pi_{11} + \pi_{10})(\pi_{11} + \pi_{01}) = p_a p_b$$

Alors la probabilité neutre au risque est donnée par :

$$\pi_{11} = p_a p_b$$

$$\pi_{10} = p_a (1 - p_b)$$

$$\pi_{01} = p_b (1 - p_a)$$

$$\pi_{00} = (1 - p_a)(1 - p_b)$$

Et donc :

$$p_{a^*} = p_a p_b + p_a (1 - p_b) + p_b (1 - p_a) = p_a + p_b - p_a p_b$$

Imaginons maintenant que ce soit une erreur de faire l'hypothèse d'indépendance et que les deux obligations sont corrélées positivement :

$$\pi_{11} > p_a p_b$$

Le prix de a^* devriat être égal à :

$$\pi_{11} + \pi_{10} + \pi_{01}$$

Le prix de a^*devrait être plus petit que le prix sous l'hypothèse d'indépendance :

$$\pi_{11} + \pi_{10} + \pi_{01} < p_a + p_b - p_a p_b$$

En effet en développant :

$$p_a + p_b - p_a p_b = \pi_{11} + \pi_{10} + \pi_{01} + (\pi_{11} - p_a p_b)$$

Le bon prix devrait être inférieur à celui déduit de l'hypothèse d'indépendance, parce que le risque de défaut est plus grand.

Il est fort probable que ce genre de phénomène soit à l'origine de la crise des subprimes. Des institutions financières ont titrisé des actifs risqués en réduisant le risque. Les titres créés se révélèrent beaucoup plus risqués qu'annoncés.