École Centrale Marseille 2A

Examen Option "Finance et stratégie", 16 Janvier 2014

Dominique HENRIET

Tous documents et calculette autorisés.
Merci de développer chacune des parties sur une copie différente.

Finance

Exercice 1 : CDS et taux d'intérêt

Dans cet exercice on veut essayer d'établir le lien entre le cours d'un CDS (credit default swap sur la dette d'un pays...) et le taux d'intérêt du crédit sous jacent. L'idée essentielle est que lorsque le prix du CDS augmente, le taux d'intérêt que doit servir l'emprunteur augmente aussi.
On considère un monde simplifié à deux dates (0 et 1) avec deux actifs et deux états de la nature. Le premier actif est l'obligation zero coupon sans risque qui donne 1 euro à la date 1. Le second est une obligation risquée. Elle donne 1 dans l'état favorable (état u) et zero dans l'état défavorable (état d) (défaillance de l'emprunteur).
On note q_1 le prix (ou cours) de l'obligation sans risque à la date 0.

- a. Quelle est la relation entre q_1 et le taux d'intérêt sans risque r_1?

On note q_u le prix de l'obligation risquée. On pose $q_u = \frac{1}{1+r_u}$

- b. Écrire la matrice A (2X2) des paiements de chacun des deux actifs dans chacun des deux états de la nature, et le vecteur p des prix à la date 0.
- c. Ecrire la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage en fonction de r_1 et r_u. Lequel des deux taux r_u et r_1 est-il le plus grand, pourquoi?

Un investisseur a en portefeuille une obligation risquée. Il désire se couvrir en achetant un CDS, ce qui revient à acheter un actif qui lui donne 1 en cas défaut de l'emprunteur et zéro sinon.

- d. Quel est le prix q_d (en fonction de r_1 et r_u) de ce CDS.
- e. Avec ce qui précède, expliquer pourquoi une forte demande de CDS (peut-être artificielle et spéculative) peut contraindre un pays emprunteur à augmenter le taux d'intérêt de sa dette (grecque) par rapport au taux sans risque (allemand).

Exercice 2 : Modèle de portefeuille

On considère un marché comportant 3 actifs : 2 actifs "action" dont les rendements par euro investi sont aléatoires et notés $\widetilde{R}_1$ et $\widetilde{R}_2$ et un actif sans risque dont le rendement est $R_0 = 1$ (le taux d'intérêt est donc nul).
Dans un premier temps on considère que l'investisseur place 1 euro uniquement sur les actifs risqués 1 et 2. On note α la part placée sur l'actif 1, $(1-\alpha)$ sur l'actif 2. (Dans la suite on n'impose pas que α est compris entre 0 et 1, c'est-à-dire que l'on autorise les positions négatives (à découvert)).
On pose $R_i = \mathrm{E}(\widetilde{R}_i)$, $\sigma_i = \sqrt{\mathrm{var}(\widetilde{R}_i)}$, $\gamma = \mathrm{cov}(\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2)$
Dans les applications numériques on considérera 2 cas :

- cas 1: $R_1 = 1,1$ $R_2 = 0,9$ $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\gamma = 0$.
- cas 2 : $R_1 = 1,1$ $R_2 = 0,9$ $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\gamma = -0.5$

On pose : $\widetilde{R}(\alpha) = \alpha\widetilde{R}_1 + (1-\alpha)\widetilde{R}_2$

- a. Calculer $\mathrm{E}(\widetilde{R}(\alpha))$ et $\mathrm{var}(\widetilde{R}(\alpha))$.
- b. Représenter l'ensemble H des combinaisons réalisables dans le plan (Ecart-type, Espérance) dans chacun des deux cas. (On rappelle $\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y)$, $\mathrm{var}(\lambda X) = \lambda^2 \mathrm{var}(X)$))

On introduit ensuite la possibilité d'investir une partie de l'euro dans l'actif sans risque (l'actif 0).

- c. Montrer que l'ensemble des couples (Ecart-type, Espérance) réalisables est formé du faisceau des demi-droites issues de $(0, R_0)$ et s'appuyant sur H.